

Titre: Technique de reconfiguration d'antennes par décomposition des diagrammes de rayonnement
Title:

Auteur: Xavier Kuhn
Author:

Date: 2012

Type: Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

Référence: Kuhn, X. (2012). Technique de reconfiguration d'antennes par décomposition des diagrammes de rayonnement [Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/912/>
Citation:

 **Document en libre accès dans PolyPublie**
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/912/>
PolyPublie URL:

Directeurs de recherche: Jean-François Frigon
Advisors:

Programme: génie électrique
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

TECHNIQUE DE RECONFIGURATION D'ANTENNES PAR DÉCOMPOSITION DES
DIAGRAMMES DE RAYONNEMENT

XAVIER KUHN
DÉPARTEMENT DE GÉNIE ÉLECTRIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLOME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(GÉNIE ÉLECTRIQUE)
AOÛT 2012

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

TECHNIQUE DE RECONFIGURATION D'ANTENNES PAR DÉCOMPOSITION DES
DIAGRAMMES DE RAYONNEMENT

présenté par : KUHN Xavier

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès Sciences Appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. CARDINAL Christian, Ph.D., président

M. FRIGON Jean-François, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. AJIB Wessam, Ph.D., membre

*À tous mes amis de Montréal,
vous me manquerez...*

REMERCIEMENTS

Tout d’abord, je tiens à remercier mon directeur de recherche, le Professeur Jean-François FRIGON, pour son soutien tout au long de ma maîtrise. Il a su m’aider et m’orienter grâce à ses précieux conseils.

Je voudrais aussi remercier mes collègues de bureau et particulièrement Diego PEREA-VEGA pour sa constante bonne humeur et son expérience de doctorant. Je n’oublie pas non plus Pierre OLIVIERI et Liwa LAYOUNI sans qui mes repas de midi auraient été bien différents.

Je souhaite également féliciter l’école Polytechnique de MONTRÉAL et Supélec, mon école d’ingénieurs en FRANCE, pour leur entente et sans laquelle mon séjour n’aurait pu aussi facilement se réaliser.

Finalement, je remercie ma famille ainsi que mes amis et mes colocataires extraordinaires pour leur soutien moral durant mes études.

RÉSUMÉ

L'expansion des télécommunications entraîne une demande de plus en plus forte en débit et en qualité de service. Ceci implique une constante évolution des systèmes sans-fil utilisés. Le déploiement des systèmes à multiples antennes (MIMO) est une solution très intéressante pouvant augmenter la fiabilité du canal et la quantité d'information transmise. Cependant, de nouveaux problèmes tels que la corrélation des canaux apparaissent. Parallèlement à cette technologie, les antennes reconfigurables sont utilisées depuis bien longtemps dans divers domaines comme celui des radars. Leur capacité à s'adapter à leur environnement n'a pas échappé aux chercheurs. En combinant ce type d'antennes dans des systèmes MIMO, diverses études indiquent une possible diminution de la corrélation des canaux par modification du diagramme de rayonnement de l'antenne par exemple.

Tout ceci est très intéressant, encore faut-il une méthode de reconfiguration capable de s'exécuter rapidement. Une technique assurant la meilleure configuration consiste à estimer le canal de transmission pour toutes les configurations possibles de l'antenne. Cependant, toutes ces estimations font perdre un temps précieux et affectent la capacité du canal. Une manière plus élaborée de configurer une antenne est de déterminer la position des sources par des méthodes comme MUSIC ou ESPRIT. Malheureusement, le nombre de sources pouvant être trouvées est limité et la complexité est assez importante.

On se propose ici de mettre au point une technique dont le but principal est de reconfigurer une antenne en diminuant le plus possible le nombre d'estimations du canal. Les canaux non-estimés vont devoir être reconstruits par un certain calcul détaillé dans notre étude. Brièvement, ce calcul se base sur une décomposition mathématique du diagramme de rayonnement de l'antenne en fonction de coefficients dépendants uniquement de la configuration de l'antenne et de diagrammes de rayonnement particuliers de l'antenne (configurations fixées). Cette technique doit bien entendu être utilisable dans un système MIMO. Les antennes étudiées sont des réseaux d'antennes linéaires uniformes (ULA) et des antennes à perte formées à partir de méta-matériaux (CRLH).

Cette étude va nous mener à observer le comportement de notre technique face à des erreurs d'estimation des canaux mesurés et des erreurs sur la reconstruction des canaux non-mesurés. Chacune de ces erreurs a ses propres caractéristiques mais au final elles dépendent toutes deux des configurations des canaux mesurés. On explique qu'un moyen simple pour parer à ces deux erreurs consiste à mesurer beaucoup de canaux ce qui va à l'encontre du but fixé par notre technique. En réalité, un compromis doit être trouvé entre le nombre de mesures, qui conditionne une partie de l'erreur de l'estimation, et l'erreur de reconstruction,

qui augmente si le nombre de canaux estimés diminue.

À travers une étude théorique, on montre que la diminution du nombre de canaux estimés est possible. Les simulations permettent de choisir précisément le nombre et les configurations pour lesquelles on doit faire des mesures. On montre aussi l'effet des erreurs de la technique présentée sur la capacité moyenne. Typiquement, l'erreur d'estimation est visible pour de faibles rapports signal à bruit. L'erreur de reconstruction est toujours présente et a pour conséquence un écart quasi constant avec la capacité maximale atteignable. Lorsque l'on prend en compte le temps perdu lors des estimations dans le calcul de la capacité, notre technique propose des résultats bien meilleurs que ceux issus par une mesure de tous les canaux. L'amélioration de la capacité varie de 5% à 15% selon l'antenne reconfigurable utilisée.

ABSTRACT

The demand for faster data rates and better quality of services constantly increases with the expansion of wireless telecommunications. Employing Multiple Input Multiple Output (MIMO) systems is a very interesting solution to improve reliability of channel and enhance data transmission. Unfortunately, new problems such as channel correlation appear. Next to these systems, reconfigurable antennas have been used for a long time in different fields like radars. Their capability to adapt to their environment has generated significant interest in adding new degrees of freedom. By combining this kind of antenna with a MIMO system, different studies show some enhancements in adapting dynamically their radiation pattern for example.

To dynamically adapt antenna, a fast and reliable reconfigurable method has to be used. In order to find the optimal antenna configuration we can proceed to a complete scanning of available configurations, which is time consuming and decreases the achievable data rate. We can also use direction of arrival estimation using the MUSIC algorithm. However, in a rich multipath environment, the direction of arrival is hard to estimate accurately with the MUSIC algorithm. Other algorithms, such as ESPRIT, could be used to estimate the channel parameters. However, they are computationally intensive, especially in a MIMO environment. Furthermore the number of direction of arrival which can be found is limited by the number of receiver.

To save time we describe here a technique using estimations of the channel for a low number of configurations of the antenna. Non-estimated channels will be derived from previous channels by a method detailed in our study. Briefly, the calculus is based on a specific decomposition of the radiation pattern of reconfigurable antennas: each pattern is expressed as a function of functions depending only on configurations of the antenna and some particular radiation patterns (fixed configurations). Our technique will have to be able to adapt any antennas in MIMO environment. The studied antennas are Uniform Linear Array (ULA) and Composite Right/Left-Handed (CRLH) antenna.

Our study will show the performance of the decomposition technique with estimation error and calculus error during computation of non-estimated channels. Each of this error have different consequences but both depend on configuration of estimated channels. The estimation error is visible for low signal-to-noise ratio and increases with the norm of coefficients of the configuration. The second error can be nullified if the number of estimated channels is sufficient. However, as we will explain later this is not the best way because it takes too many estimations. A compromise has to be found between performances and

number of estimation.

Through theoretical study, we demonstrate how it is possible to decrease the number of estimation without degrading performances. Simulations will be helpful to precisely choose the best combination of estimated channel. We are even able to improve the performance of 5% – 15% better than the method estimating channel for each configuration.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE	iii
REMERCIEMENTS	iv
RÉSUMÉ	v
ABSTRACT	vii
TABLE DES MATIÈRES	ix
LISTE DES TABLEAUX	xii
LISTE DES FIGURES	xiii
LISTE DES ANNEXES	xv
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS	xvi
LISTE DES NOTATIONS	xvii
CHAPITRE 1 INTRODUCTION	1
1.1 Contexte	1
1.2 Éléments de la problématique	2
1.3 Objectifs de recherche	3
1.4 Plan du mémoire	4
CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE	5
2.1 Utilisation des antennes reconfigurables	5
2.1.1 Amélioration des performances du système	5
2.1.2 Type d'antennes reconfigurables	6
2.2 Techniques d'estimation de canal	7
2.2.1 Estimation du canal d'un système quelconque	7
2.2.2 Estimation du canal pour des système OFDM	8
2.2.3 Effet de l'estimation du canal sur la capacité	8
2.2.4 Estimation du rapport signal à bruit	9
2.3 Techniques de configuration	9

2.3.1	Critiques de méthodes existantes	9
2.3.2	Configurations de réseaux d'antennes	10
CHAPITRE 3 PRÉSENTATION DE LA TECHNIQUE		12
3.1	Modélisation du système MIMO	12
3.1.1	Structure du système MIMO	12
3.1.2	Modèle du canal MIMO	13
3.2	Principe de décomposition du canal	14
3.2.1	Absence de couplage entre antennes	14
3.2.2	Prise en compte du couplage	17
3.3	Résumé de la technique	19
3.3.1	Récapitulatif de la techniaue et discussion sur la dimension de la base .	19
3.3.2	Comment maximiser la capacité ?	19
CHAPITRE 4 ERREURS D'ESTIMATION ET DE RECONSTRUCTION DU CANAL		23
4.1	Les erreurs à prendre en compte	23
4.2	Erreur d'estimation	24
4.2.1	Estimateur moindres carrés	24
4.2.2	Covariance de l'estimateur de la matrice de canal	26
4.2.3	Estimation de la norme de la matrice de canal	27
4.2.4	Variance de l'estimateur de la norme de la matrice de canal	29
4.2.5	Estimation du déterminant d'un système MIMO 2×2	30
4.3	Erreur de reconstruction	32
4.3.1	Erreur de reconstruction de la matrice de canal	32
4.3.2	Erreur de reconstruction de la norme de la matrice de canal	35
4.4	Erreurs d'estimation et de reconstruction	36
4.4.1	Comparaison de la valeur des deux erreurs	37
4.4.2	Calcul de la capacité avec connaissance erronée du canal au récepteur .	39
CHAPITRE 5 MÉTHODES DE DÉCOMPOSITION DES DIAGRAMMES DE RAYON-		
NEMENT		42
5.1	Décomposition pour un cas quelconque	42
5.1.1	Présentation générale du problème	42
5.1.2	Calcul des coefficients de projection	43
5.2	Séparation avérée des variables	44
5.2.1	Conservation de la dimension de la base	45
5.2.2	Modification de la dimension	46

5.2.3	Application aux réseaux d'antennes linéaires	48
5.3	Utilisation de la décomposition SVD	53
5.3.1	Décomposition exacte des diagrammes de rayonnement testés : SVD "compacte"	53
5.3.2	Décomposition approximative	54
5.3.3	Réseau d'antennes	55
5.3.4	Antenne CRLH	56
5.4	Critères de sélection des configurations de base	57
5.4.1	Minimisation de l'erreur de reconstruction de la matrice de canal . . .	57
5.4.2	Minimisation de l'erreur d'estimation	61
CHAPITRE 6	SIMULATIONS	66
6.1	Paramètres des simulations	66
6.2	Nombre de configurations	67
6.3	Influence de la méthode de calcul des coefficients de projection dans différents contextes de distribution d'arrivée	69
6.3.1	Choix du type de calcul et de la distribution	69
6.3.2	Effet de la dispersion de la direction d'arrivée	72
6.4	Impact de la dimension de la base sur l'erreur de reconstruction	73
6.5	Erreur d'estimation et capacité corrigée	75
6.5.1	Pourquoi modifier la capacité ?	75
6.5.2	Résultats obtenus avec cette capacité	76
6.6	Choix de la dimension et des configurations	77
6.6.1	Prise en compte des deux types d'erreur	77
6.6.2	Choix optimaux pour nos réseaux d'antennes étudiés	79
6.6.3	Dimension de base sept pour les réseaux de huit éléments	80
6.6.4	Étude de la distribution de sélection des configurations	81
6.7	Système SISO avec antenne CRLH en réception	82
6.8	Système MIMO quelconque	85
CHAPITRE 7	CONCLUSION	88
7.1	Synthèse des travaux	88
7.2	Limitations de la technique de décomposition et perspectives	89
RÉFÉRENCES	90
ANNEXES	93

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 3.1	Nombre d'estimations selon la technique et la prise en compte du couplage	21
Tableau 4.1	Comparaison des erreurs d'estimation et de reconstruction pour réseau ULA $N = 4$ et $L = 2$	38
Tableau 4.2	Comparaison des erreur d'estimation et de reconstruction pour réseau ULA $N = 8$ et $L = 2$	39
Tableau 5.1	Configurations de base pour un réseau ULA $N = 4$ et $L = 2$ par minimisation de l'erreur de reconstruction	60
Tableau 5.2	Configurations de base pour un réseau ULA $N = 8$ et $L = 2$ par minimisation de l'erreur de reconstruction	60
Tableau 5.3	Configurations de base pour une antenne CRLH par minimisation de l'erreur de reconstruction	61
Tableau 5.4	Configurations de base pour un réseau ULA $N = 4$ et $L = 2$ par minimisation de l'erreur d'estimation	63
Tableau 5.5	Configurations de base pour un réseau ULA $N = 8$ et $L = 2$ par minimisation de l'erreur d'estimation	63
Tableau 5.6	Configurations de base pour une antenne CRLH par minimisation de l'erreur d'estimation	64
Tableau 6.1	Configuration de base pour les trois distributions de direction d'arrivée	70
Tableau 6.2	Constante d'erreur de reconstruction pour un réseau ULA $N = 4$ et $L = 2$	75
Tableau 6.3	Constante d'erreur de reconstruction pour un réseau ULA $N = 8$ et $L = 2$	75
Tableau 6.4	Constante d'erreur de reconstruction pour une antenne CRLH	84
Tableau B.1	Paramètres de l'antenne CRLH	96

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1	Schéma de configuration d'antenne	3
Figure 3.1	Schéma du système MIMO	13
Figure 4.1	Structure de la trame transmise	25
Figure 5.1	Diagrammes de rayonnement de base pour un réseau ULA $N = 2$ et $L = 2$	50
Figure 5.2	Diagrammes de rayonnement de base pour un réseau ULA $N = 4$ et $L = 2$	50
Figure 5.3	Diagrammes de rayonnement de base pour un réseau ULA $N = 8$ et $L = 2$	51
Figure 5.4	Présence de maximum pour un réseau ULA $N = 4$ et $L = 2$ avec $K = 4$	52
Figure 5.5	Présence de maximum pour un réseau ULA $N = 8$ et $L = 2$ avec $K = 4$	52
Figure 5.6	Valeur singulière pour différents réseaux ULA	55
Figure 5.7	Présence de maximum pour une antenne CRLH	56
Figure 5.8	Valeur singulière pour une antenne CRLH	57
Figure 6.1	Influence du nombre de configurations sur la capacité pour différents réseaux de longueur $L = 2$	68
Figure 6.2	Erreur relative de la capacité pour une distribution uniforme de la direction d'arrivée	70
Figure 6.3	Erreur relative de la capacité avec un cluster de position moyenne $\phi_0 = 70^\circ$	71
Figure 6.4	Erreur relative de la capacité avec un cluster de position moyenne $\phi_0 = 100^\circ$	71
Figure 6.5	Influence de la taille du cluster	73
Figure 6.6	Erreur de la capacité pour un réseau ULA $N = 4$ et $L = 2$ avec uniquement erreur de décomposition	74
Figure 6.7	Écart relatif de la capacité corrigée pour un réseau ULA $N = 4$ et $L = 2$ en absence d'erreur de reconstruction	77
Figure 6.8	Erreur de la capacité pour un réseau ULA $N = 4$ et $L = 2$ avec erreurs de reconstruction et d'estimation	78
Figure 6.9	Écart relatif de la capacité corrigée pour un réseau ULA $N = 4$ et $L = 2$	79
Figure 6.10	Écart relatif de la capacité corrigée pour un réseau ULA $N = 8$ et $L = 2$	80
Figure 6.11	Influence du critère de minimisation sur la capacité pour un réseau ULA $N = 8$ et $L = 2$ de dimension de base 7	81

Figure 6.12	Sélection des configurations pour un réseau ULA $N = 4$ et $L = 2$. . .	82
Figure 6.13	Sélection des configurations pour un réseau ULA $N = 8$ et $L = 2$. . .	83
Figure 6.14	Erreur relative de la capacité corrigée dans un système SISO pour une antenne CRLH	84
Figure 6.15	Simulation de la technique pour une maximisation du déterminant dans un système 2×2 pour antennes ULA $N = 4$ et $L = 2$ de dimension quatre	85
Figure 6.16	Simulation de la technique pour une maximisation du déterminant dans un système 2×2 pour antennes ULA $N = 8$ et $L = 2$ de dimension cinq	86
Figure A.1	Schéma du réseau ULA	93

LISTE DES ANNEXES

Annexe A	DIAGRAMME DE RAYONNEMENT D'UN RÉSEAU D'ANTENNES LINÉAIRE UNIFORME	93
Annexe B	DIAGRAMME DE RAYONNEMENT D'UNE ANTENNE CRLH . . .	95
Annexe C	INVERSION D'UNE MATRICE CARRÉE DE VANDERMONDE . .	97

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

CRLH	Composed Right/Left-Handed
FET	Transistor à effet de champ
LTE	Long Term Evolution
LW	onde à perte (leaky-wave)
MEMS	Microsystème électromagnétique
MIMO	Multiple-Input Multiple-Output
MISO	Multiple-Input Single-Output
MMSE	Minimum Mean Square Error
OFDM	Orthogonal Frequency-Division Multiplexing
OSTBC	Orthogonal Space-Time Block Code
PIN	Positive Intrinsic Negative
SIMO	Single-Input Multiple-Output
SISO	Single-Input Single-Output
SNR	Rapport signal à bruit
SVD	Singular Value Decomposition
ULA	Réseau d'antennes linéaire uniforme (Uniform Linear Array)

LISTE DES NOTATIONS

m et M	scalaire
\mathbf{m}	vecteur
\mathbf{M}	matrice
\mathbf{M}^T	matrice transposée
\mathbf{M}^*	matrice conjuguée
\mathbf{M}^H	matrice trans-conjuguée
\mathbf{M}^\dagger	matrice pseudo-inverse
$\text{Tr} [\mathbf{M}]$	trace de la matrice
$\ \mathbf{M}\ _F$	norme de Frobenius
$\ \mathbf{m}\ _2$	norme deux d'un vecteur
$\text{vec} \{\mathbf{M}\}$	vectorisation de la matrice (mise à la suite des colonnes de \mathbf{M} pour former un vecteur)
$\mathbf{M}_1 \otimes \mathbf{M}_2$	produit de Kronecker
\mathbf{I}_n	matrice identité de dimension $n * n$
$\mathbf{0}_n$	vecteur de zéros de dimension $n * 1$
$\mathbb{E} \{X\}$	moyenne ou espérance de la variable aléatoire X
$X \sim \mathcal{CN}(m_X, \sigma_X^2)$	loi Gaussienne complexe circulaire symétrique de moyenne m_X et de variance σ_X^2
$p \equiv q [n]$	p est congru à q modulo n

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

1.1 Contexte

La capacité des antennes reconfigurables à modifier leur comportement face à leur environnement les a rendues extrêmement populaires. De nombreuses applications dans divers domaines du sans-fil les emploient aujourd'hui. Leur utilisation dans les radars est très développée car elles permettent de balayer une large zone sans avoir recours à des antennes mobiles. Elles facilitent aussi grandement la poursuite de cibles mouvantes. Ce type d'antennes a aussi trouvé sa place en astronomie embarqué dans des satellites afin de communiquer avec une base terrestre. Leur fonctionnement est assez proche d'éléments reconfigurables utilisés en optique ou bien en acoustique (sonar). Ces antennes sont pratiques mais le plus souvent très chères et de fait réservées au domaine militaire.

Leurs caractéristiques sont cependant très intéressantes et peuvent être d'une grande utilité dans le domaine des télécommunications. En effet, le fait de pouvoir focaliser le diagramme de rayonnement d'une antenne dans une direction de l'espace ouvre de nombreuses possibilités. Il devient alors envisageable d'augmenter le gain de l'antenne dans des directions spécifiques ou bien d'annuler des signaux d'interférence par modification en temps réel du diagramme de rayonnement par exemple. Il a donc été conçu des antennes beaucoup plus petites que celles présentées dans les applications précédentes et pouvant être intégrées dans des appareils de télécommunications. Celles-ci se sont aussi grandement développées avec l'utilisation de composants MEMS.

Les premières études faites avec ces antennes en télécommunications avaient uniquement pour but de maximiser le rapport signal à bruit dans des systèmes simples avec une antenne à l'émission et une antenne à la réception (système SISO). Étendue aux systèmes avec plusieurs antennes en émission et plusieurs en réception (système MIMO), la reconfiguration se complexifie. Les systèmes MIMO ont su capter l'attention durant ces deux dernières décennies par leurs fabuleuses caractéristiques. Ils répondent directement aux enjeux des télécommunications qui sont d'augmenter le débit de transfert des informations tout en assurant une faible erreur. Ceci vient du fait que l'on est capable d'émettre différents signaux à un instant donné et tous ces signaux sont reçus par chaque antenne réceptrice. Les systèmes MIMO ont ainsi été prévus dans de nombreuses normes de télécommunication sans fil comme Wifi (802.11n), Wimax (802.16e) et LTE. Des études ont cependant montré la grande difficulté

qu'ont ces systèmes à correctement dissocier les signaux d'arrivée, en d'autres mots à décorrélérer les canaux de transmission. Les antennes reconfigurables ont encore une fois montré leur grande utilité. Elles permettent une meilleure isolation des signaux et ainsi une meilleure estimation de ces derniers. La décorrélation du canal peut être assurée autrement dans des cas particuliers de système MIMO. C'est le cas des systèmes MISO (plusieurs émetteurs et un récepteur), SIMO (un émetteur et plusieurs récepteurs) ou encore des systèmes MIMO utilisant un codage spatio-temporel par bloc orthogonal.

Comme antennes reconfigurables assez répandues on trouve les réseaux d'antennes. Le plus simple est le réseau d'antennes linéaire uniforme (ULA) qui est constitué d'éléments radiants alignés et espacés d'une même distance. Chaque élément du réseau est capable de modifier l'amplitude ou la phase du signal. Leur nombre est extrêmement variable selon l'utilisation : deux ou quatre éléments permettent à ces antennes d'être intégrées dans de petits appareils. On trouve aussi des réseaux de quarante voire cent éléments pour des antennes utilisées en aérospatial. Le diagramme de rayonnement résultant de ces réseaux forme des lobes constructifs (augmentation du gain de l'antenne) ou destructifs (diminution voire annulation du gain) dans certaines directions. Il est possible de trouver des réseaux bi-dimensionnels ou tri-dimensionnels. D'autres types d'antennes reconfigurables existent comme les antennes CRLH-LW qui utilisent des propriétés des méta-matériaux.

1.2 Éléments de la problématique

Les antennes reconfigurables peuvent en théorie suivre des utilisateurs mobiles ou s'adapter à un environnement extérieur ou intérieur. La communication n'est possible que si le canal reste stable sur une certaine durée permettant la reconfiguration de l'antenne et l'envoi et la réception de donnée. L'utilisation de ces antennes est donc envisageable à l'unique condition qu'il existe des techniques de reconfiguration s'exécutant rapidement et donnant de bonnes performances.

Une grande partie des méthodes existantes ont le même schéma de principe de fonctionnement présenté dans [1]. Ce schéma se trouve à la figure 1.1. Il est composé de deux parties. La première permet de déterminer des informations sur le canal. Ces informations vont permettre de faire une décision sur la configuration à adopter. La seconde partie traite le signal après configuration lors du transfert de données. Lorsque les antennes reconfigurables se trouvent à l'émission, il faut prévoir un mécanisme permettant de retransmettre l'information depuis les récepteurs vers les émetteurs. Les informations récupérées peuvent être de différentes natures. Il peut s'agir par exemple d'estimation du canal de transmission pour différentes configurations des antennes ou bien l'emplacement des sources.

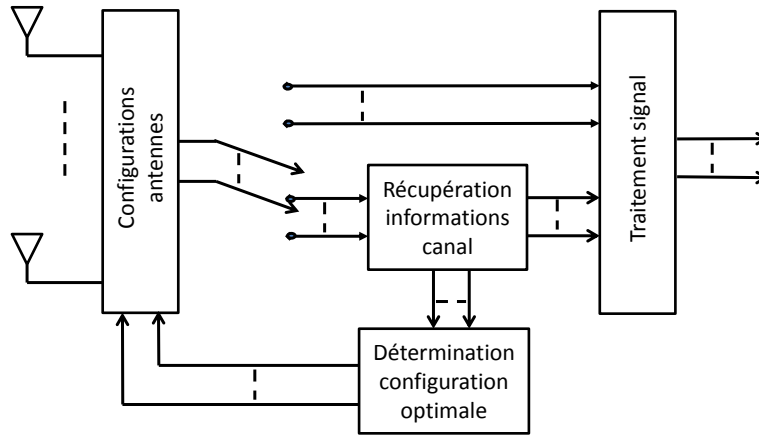


Figure 1.1 Schéma de configuration d'antenne

Les méthodes permettant la détermination des sources sont soumises à certaines conditions et sont assez gourmandes en calcul et en temps surtout pour des systèmes MIMO. Les estimations de canal pour différentes configurations d'antennes sont des méthodes plus simples. Le seul inconvénient est qu'il faut faire un assez grand nombre de mesures de canal. Une estimation du comportement du canal pour toutes les antennes consomme beaucoup de temps et diminue la capacité du canal.

1.3 Objectifs de recherche

L'objectif principal de notre recherche est d'élaborer une technique de configuration d'antennes dans un système MIMO capable de diminuer le nombre d'estimations du canal. On prend comme critère d'optimisation de la reconfiguration la maximisation de la capacité instantanée du canal. L'antenne utilisée n'est pas spécifiée.

Une fois la méthode mise au point, on étudie théoriquement sa faisabilité et les possibles erreurs entraînées. Ce mécanisme de configuration est à tester pour des réseaux d'antennes ULA. Les réseaux d'antenne ont en fait des propriétés qui permettent de faire une étude un peu plus poussée de la décomposition des diagrammes de rayonnement. Une antenne CRLH est aussi étudiée car elle n'offre pas les mêmes simplifications du problème.

Les performances de notre technique sont à comparer à celles issues de la mesure des canaux pour toutes les configurations.

1.4 Plan du mémoire

Notre étude est organisée de la manière suivante. La revue littéraire se trouve dans le chapitre 2. Elle a pour but de présenter différentes antennes utilisées dans cette recherche et d'expliquer le fonctionnement de quelques techniques de reconfiguration existantes. On y trouve aussi différents procédés d'estimations de canal. Le chapitre 3 présente la technique que l'on souhaite tester. Il est démontré pour un modèle géométrique de canal. On explique de quelle manière le nombre d'estimations du canal peut être diminué. Pour cela on démontre que l'on est capable de connaître le canal quelque soit la configuration des antennes à partir de quelques estimés de canaux pour certaines configurations particulières. Les erreurs commises sur la détermination des canaux font l'objet du chapitre 4. On distingue deux types d'erreur. La première est issue de l'estimation des canaux et la deuxième provient du calcul de reconstruction permettant la détermination des canaux manquants. Le chapitre 5 contient diverses méthodes permettant de minimiser l'erreur de reconstruction des canaux. On y détaille aussi les critères utiles aux choix des canaux à mesurer et des canaux à calculer. Le chapitre 6 contient les simulations permettant d'éclaircir la plupart des problématiques soulevées dans les autres chapitres. Les performances de notre technique y sont comparées avec celui mesurant tous les canaux.

CHAPITRE 2

REVUE DE LITTÉRATURE

Ce chapitre est une synthèse de différents points que l'on va aborder dans cette étude et qui ont été déjà traités dans la littérature. Tout d'abord dans 2.1, on donne une justification de l'utilisation des antennes reconfigurables dans les systèmes MIMO. Par la même occasion une revue de différents types d'antennes que l'on peut trouver est faite. Ensuite diverses techniques de configurations déjà existantes sont présentées dans 2.3. Enfin dans 2.2, on conclut ce chapitre sur un rappel de méthodes mathématiques permettant l'estimation des différents paramètres du système.

2.1 Utilisation des antennes reconfigurables

Une antenne reconfigurable a la capacité de s'adapter à son environnement en modifiant son diagramme de rayonnement, sa polarisation ou bien sa fréquence. De nombreuses études ont montré une amélioration significative des performances du système lorsque de telles antennes sont utilisées. Pour cette raison, il est possible de trouver diverses antennes reconfigurables dans la littérature.

2.1.1 Amélioration des performances du système

Une utilisation très intéressante des antennes reconfigurables est faite lorsqu'elles sont déployées dans des systèmes MIMO. Ce type de système permet d'augmenter le débit en ajoutant de nouveaux degrés de liberté et aussi de renforcer le lien de transmission par sa diversité sans utiliser plus de bande passante ni augmenter la puissance d'émission. Cependant, ces systèmes sont soumis à de nouveaux problèmes comme celui de la corrélation entre les canaux. En effet, si certaines conditions ne sont pas rassemblées, il est assez difficile de recevoir des signaux de différentes antennes et de pouvoir les identifier à la réception. Les antennes reconfigurables offrent une solution intéressante. Ceci a été notamment démontré dans [2]. Dans cet article, il a été étudié un système dont les antennes ont des diagrammes de rayonnement reconfigurable en émission et en réception. L'apport de gain dans certaines directions a montré une amélioration du SNR.

Les antennes reconfigurables peuvent aussi être utilisées dans des systèmes utilisant des ondes millimétriques (60 GHz). En effet, un point intéressant que l'on n'aborde pas dans cette étude est l'encombrement supplémentaire causé par le déploiement d'antennes reconfi-

gurables. Le plus souvent ces dernières prennent plus de place que des antennes normales. Or, à très hautes fréquences, les antennes n'ont pas besoin d'être aussi grandes qu'aux fréquences utilisées par la Wifi. Les systèmes à ondes millimétriques sont donc plus à même d'utiliser de telles antennes. Cependant, ces systèmes sont soumis à d'autres problèmes que l'on ne rencontre pas à de basses fréquences comme la rapide décroissance de la puissance du signal causée par sa propagation dans l'air.

D'autres systèmes emploient des antennes reconfigurables pour des utilisations bien spécifiques comme l'annulation d'interférences [3] ou tout simplement l'amélioration de la réception des signaux dans certaines directions.

2.1.2 Type d'antennes reconfigurables

Il est possible de jouer sur différents facteurs pour adapter l'antenne à son environnement. On peut agir sur la fréquence, la polarisation ou encore le diagramme de rayonnement. Afin de modifier ces caractéristiques, différents systèmes ont été employés durant ces dernières années et ils font principalement intervenir des interrupteurs. La modification de l'état de ces interrupteurs permet de rallonger ou raccourcir le circuit dans lequel se propage le signal. Par exemple, pour l'antenne circulaire présentée dans [4] la modification de la surface du patch permet d'exciter différents modes de l'antenne. La modification de la taille du circuit peut aussi servir de déphasage. Comme interrupteur on retrouve des diodes PIN dans l'antenne Octagonal Reconfigurable Isolated Orthogonal Element (ORIOL) [5], des transistors à effet de champ (FET) [6] ou des MEMS pour l'antenne PIXEL [7]. Pour donner un ordre de grandeur, les diodes PIN et les transistors à effet de champ peuvent changer d'état en $1 - 100ns$ et un interrupteur en MEMS en $1 - 200\mu s$. Un récapitulatif de ces divers interrupteurs est fait dans [8]. L'utilisation de l'un ou l'autre type dépend par exemple de la fréquence utilisée. Divers exemples d'utilisations de MEMS dans les antennes reconfigurables sont présentés dans [9].

Un autre type d'antennes que l'on retrouve sont les réseaux d'antennes. Les sorties des différentes antennes sont associées après un passage dans des déphaseurs et amplificateurs. En théorie, de telles antennes permettent un balayage angulaire complet : les déphaseurs peuvent prendre n'importe quelles valeurs et le diagramme de rayonnement de l'antenne est capable de pointer dans n'importe quelle direction. Dans les faits, ces déphaseurs sont quantifiés. Ils consistent en une suite successive de bouts de circuit que l'on peut ou non activer rallongeant le temps de propagation. Ces déphaseurs quantifiés ont typiquement des valeurs de la forme donnée dans [3] et [10] :

$$2\pi \frac{k}{2K} \quad (2.1)$$

avec K un entier naturel. k varie entre 0 et $2^K - 1$ et sa valeur dépend des parties du circuit que l'on active.

D'autres systèmes utilisent des méta-matériaux comme pour les antennes dites CRLH-LW (Composite Right/Left-Handed Leaky-Wave) présentées dans [11]. Ce type d'antennes peut être modélisé comme un réseau d'antennes ayant des pertes. La directivité de cette antenne ainsi que les pertes varient selon la fréquence utilisée.

Les réseaux d'antennes et les antennes CRLH vont être utilisés dans cette étude. Pour cette raison on retrouve dans les annexes A et B le calcul de leur diagramme de rayonnement.

2.2 Techniques d'estimation de canal

La plupart des méthodes de configuration présentées plus tard ont besoin d'avoir certains renseignements sur le canal. Des outils ont donc été développés afin d'obtenir des estimations de la matrice de canal, de sa norme ou bien encore du rapport signal à bruit.

2.2.1 Estimation du canal d'un système quelconque

On distingue deux grandes classes de méthodes d'estimation de la matrice de canal. La première utilise une séquence d'apprentissage, c'est-à-dire un message envoyé par l'émetteur et connu du récepteur. La seconde arrive à estimer le canal sans cette séquence.

Estimation avec séquence d'apprentissage

Les estimateurs basés sur une séquence d'apprentissage ont l'avantage d'être de faible complexité. La discussion récurrente dans les articles traitant ce sujet est de déterminer la meilleure séquence. Dans [12], un estimateur à maximum de vraisemblance est utilisé. Le calcul de l'erreur d'estimation montre que cette séquence d'apprentissage doit avoir des éléments orthogonaux. La seconde partie de [12] tente de chercher l'estimateur MMSE connaissant la moyenne et la matrice de corrélation du canal. Anticipant le fait que cette matrice ne soit pas accessible, un modèle simplifié de matrice de corrélation est utilisé. Dans [13], il est montré que l'estimateur établi précédemment n'est pas l'estimateur MMSE. La séquence d'apprentissage utilisée était beaucoup trop spécifique. Les auteurs proposent alors un autre estimateur MMSE pour un canal suivant une loi gaussienne. L'article continue sur l'estimation de la norme de la matrice du canal qui est importante pour la détermination de performance dans les systèmes MISO, SIMO ou MIMO avec codage spatio-temporel. L'estimateur de maximum de vraisemblance est repris dans cette étude dans la partie 4.2 car il fonctionne pour tous les types de systèmes. De plus, il est assez simple et on connaît les statistiques de l'erreur commise.

Estimation sans séquence d'apprentissage

Sans séquence d'apprentissage l'estimation devient compliquée et demande de nombreuses mesures avant d'avoir un résultat exploitable. Les signaux reçus permettent de calculer certaines fonctions de coût utilisant des matrices de moment d'ordre deux ou quatre. Par exemple la méthode de Shalvi-Weinstein est basé sur une maximisation du kurtosis (moment d'ordre quatre d'une variable aléatoire aussi appelé coefficient d'aplatissement de Pearson). Pour les systèmes SIMO, il est possible d'employer la méthode de Godart (ou CMA ou Module Constant). Parmi les estimateurs utilisant la matrice de corrélation des signaux reçus on retrouve un estimateur à maximum de vraisemblance qui doit à la fois déterminer le signal et le canal. La technique dite d'ajustement de la covariance ne s'occupe elle que de la recherche de la valeur du canal. On peut trouver encore d'autres méthodes comme la prédiction linéaire ou celle des sous-espaces. Il faut juste retenir que la plupart de ces méthodes sont itératives. Elles demandent beaucoup de puissance de calcul et restent assez sensibles au bruit. De plus, elles sont prévues pour des systèmes SIMO mais des extensions à des systèmes MIMO sont envisageables. Les résultats obtenus atteignent rarement les performances des estimateurs utilisant des séquences d'apprentissage.

2.2.2 Estimation du canal pour des système OFDM

Les systèmes de télécommunications utilisant l'OFDM ne peuvent pas appliquer directement les méthodes d'estimation précédentes. Il est ainsi possible de trouver des procédures propres à ce type de système. Dans [14], il est présenté une méthode ne s'appuyant sur aucune connaissance statistique du canal. Les auteurs de [15] vont encore plus loin et proposent une technique d'estimation itérative pour des systèmes OFDM dans lesquelles les préfixes cycliques et les pilotes des sous-porteuses ont été supprimés. Ceci partant du constat que les préfixes cycliques sont parfois trop longs vis-à-vis du message contenant l'information. Cette technique utilise un estimateur de maximum de vraisemblance et des calculs de transformée de Fourier dont le but est de minimiser les interférences entre les porteuses et entre les symboles. Le canal doit cependant être statique ou quasi-statique pour que la technique de reconfiguration soit performante.

2.2.3 Effet de l'estimation du canal sur la capacité

Le fait d'avoir une valeur estimée du canal et non sa valeur réelle a des conséquences sur le décodage du signal. La capacité du canal en est alors directement affectée et on assiste à une diminution générale des performances plus ou moins importante selon le rapport signal à bruit [16]. Dans [17], une borne inférieure de la capacité est calculée lorsque l'estimation

est faite à partir d'un estimateur à maximum de vraisemblance pour un système MIMO avec codage spatio-temporelle. Au détriment des estimateurs utilisant des séquences d'apprentissage, l'envoi de la séquence d'apprentissage fait perdre du temps car aucune information utile n'est alors transmise durant cette période.

2.2.4 Estimation du rapport signal à bruit

Le rapport signal à bruit a un rôle important dans la configuration des antennes [4]. Il est d'ailleurs pris comme critère de maximisation par quelques procédés de configuration. Certaines estimations du canal et de sa norme sont impossibles à faire sans sa connaissance. Là encore des méthodes existent pour répondre à ce besoin. Dans [18], il est fait une comparaison quantitative de méthode d'estimation en se basant sur l'étude de la borne de Cramer-Rao pour des modulations FSK. De même que pour l'estimation du canal, on retrouve des procédures avec ou sans séquence d'apprentissage. De manière assez classique il y a l'estimateur à maximum de vraisemblance [19] et des méthodes utilisant des moments d'ordre deux ou quatre [20]. Il n'existe pas de méthode parfaite : le choix du meilleur estimateur varie entre autre selon le type de système, l'ordre de grandeur du rapport signal à bruit et le nombre d'échantillons utilisés.

2.3 Techniques de configuration

Pour obtenir les performances promises par l'utilisation d'antennes reconfigurables, on doit être capable de trouver de manière efficace les paramètres optimaux de configuration. Par efficacité on entend bien sûr le temps qui est utile à leur détermination et aussi la complexité de la méthode employée.

2.3.1 Critiques de méthodes existantes

La première idée, la plus simple, est de tester toutes les configurations. Par estimation du canal de transmission pour chacune de ces configurations, il devient aisé de choisir le meilleur paramétrage de l'antenne. Une étude théorique d'une telle méthode a été faite dans [21]. Le critère de sélection de la configuration est la maximisation du rapport signal à bruit. L'article montre l'influence de l'allocation de puissance et la manière dont les antennes sont regroupées. Une prise en compte de la structure physique des antennes est nécessaire pour cette technique. Cette méthode est prise comme référence car elle permet d'obtenir toujours la meilleure reconfiguration. Bien sûr ceci est seulement vrai si la détermination des canaux est correcte. Un autre avantage de cette procédure est sa faible complexité.

Une critique évidente que l'on peut faire sur ce type de méthode exhaustive est le temps perdu lors des estimations. En effet, il faut garder en mémoire que selon le nombre de configurations testées cette technique peut devenir rapidement gourmande en temps. Pour contrer cet effet, les auteurs de [4] présentent une technique de configuration dont une partie se déroule avant même l'utilisation de l'antenne. Cette étude est menée pour le cas spécifique des antennes planaires circulaires (patch en anglais). La méthode propose de déterminer à l'avance des tables faisant la correspondance entre la matrice de corrélation du canal, le rapport signal à bruit et le mode d'excitation optimal à utiliser. La connaissance des deux premiers paramètres mène alors directement au choix du mode. Mise à part le gain de temps, cette méthode a un autre avantage qui est de ne pas modifier les trames de signaux des systèmes de télécommunication actuels.

2.3.2 Configurations de réseaux d'antennes

En soit l'idée d'avoir des méthodes spécifiques à certains types d'antennes comme dans [4] est intéressante mais n'est pas nouvelle. On retrouve ainsi une littérature très riche concernant la configuration des réseaux d'antennes utilisant des déphaseurs et/ou des amplificateurs.

Réseaux avec déphaseurs et amplificateurs

Les systèmes ayant la plus grande flexibilité sont les réseaux combinant à la fois les déphaseurs et les amplificateurs en arrière de chaque antenne. La plupart des techniques de configuration mises au point ont besoin de connaître la matrice de corrélation du canal. Selon le souhait de l'utilisateur, il devient alors possible d'annuler les interférences provenant d'autres sources et de maximiser le rapport signal à bruit et interférence. Un grand nombre de méthodes est regroupé dans [1]. Il est à noter qu'en général l'effet du couplage est négligé bien que ce phénomène ait des conséquences directes sur le système plus ou moins importantes. Dans [22] par exemple, il est montré une modification de l'emplacement des zéros du diagramme de rayonnement.

Réseaux avec uniquement des déphaseurs

Le problème de ces réseaux combinant déphaseurs et amplificateurs est la structure physique de l'antenne qui peut être assez complexe. Pour cette raison, il est assez commun de rencontrer des réseaux ne pouvant modifier que l'un de ces paramètres. Lorsque seuls des déphaseurs sont utilisés de nombreuses techniques itératives existent. Ils reprennent des méthodes d'optimisation mathématiques assez classiques comme la méthode de Newton [23], la descente de gradient [24] et la technique de minimisation de moindre-carré. Dans [3], un

algorithme génétique est employé. Il y est démontré que cette technique permet d'annuler le signal reçu selon certaine direction sans aucune connaissance préalable sur l'emplacement des sources. Il est appliqué pour de très grands réseaux ayant quarante voire cent éléments. Dans [10] un processus de configuration pour un système MISO est mis en oeuvre. Les antennes reconfigurables se trouvent à l'émission. À intervalle régulier une séquence est envoyée permettant la configuration d'un ou plusieurs déphaseurs. Une dernière méthode consiste à tester de manière aléatoire des configurations et au fur et à mesure à affiner le choix de la configuration. On peut reprocher à la plupart de ces méthodes de ne pouvoir s'appliquer qu'à ce type d'antennes. Elle demande en plus une certaine connaissance des statistiques du canal. Enfin, elles ne sont souvent applicables qu'à des cas où les déphaseurs ne sont pas quantifiés.

Détermination de la direction des sources

Lorsque que l'on souhaite maximiser la puissance reçue ou annuler des signaux d'interférence, il est très utile de connaître la position des différentes sources. Une fois ces sources déterminées il devient simple de calculer les valeurs optimales des déphaseurs. Les algorithmes les plus connus sont MUSIC (Multiple Signal Classification) [25] et ESPRIT (Estimation of Signal Parameters by Rotational Invariance Techniques) [26]. Le premier est assez complexe d'un point de vue des calculs et demande une connaissance de l'emplacement des récepteurs les uns par rapport aux autres. Le second plus léger impose l'utilisation de doublets d'antennes. Ces deux méthodes ont pour inconvénient de pouvoir déterminer un nombre de sources limité typiquement inférieur au nombre de récepteurs. Dans [27], Capon a développé la technique MVDR (Minimum Variance Distortionless Response) qui impose des sources non-cohérentes et assez éloignées. L'utilisation de telles méthodes ne va pas être faite ici car le nombre de source est inconnu.

CHAPITRE 3

PRÉSENTATION DE LA TECHNIQUE

Précédemment, on a vu que la technique de configuration pour une antenne quelconque consistait à déterminer le canal de transmission pour toutes les configurations possibles, comme c'est le cas dans [21]. Cette méthode est extrêmement coûteuse en temps. Au prix d'une complexité un peu plus élevée on va montrer qu'il est possible de diminuer le nombre de mesures de canal.

Ce chapitre s'ordonne de la manière suivante. En premier lieu dans 3.1, le système de transmission et le modèle de canal considérés sont présentés. Il s'en suit l'explication en tant que telle de la technique utilisée dans 3.2. Cette dernière consiste à déterminer le canal de transmission pour certaines configurations de ces antennes. Par combinaison linéaire des canaux précédemment évalués on peut alors calculer le canal pour des configurations quelconques. Cette reconstruction du canal est en fait directement reliée à une décomposition du diagramme de rayonnement. À la fin de ce chapitre dans 3.3, la capacité du canal, qui est notre paramètre à maximiser, est donnée pour différents types de système MIMO. Cela va nous permettre d'établir plus clairement les critères d'optimisation de la capacité. Tout au long de ce chapitre on explique les différences qu'entraîne la prise en compte ou non du couplage entre les antennes. Toute l'étude théorique et les simulations faites dans les prochains chapitres négligent les effets de couplage.

La technique présentée s'ordonne principalement autour de trois points :

- décomposition des diagrammes de rayonnement ;
- estimation du canal pour des configurations particulières des antennes ;
- reconstruction des canaux basée sur la décomposition et les canaux estimés et détermination de la configuration optimale.

3.1 Modélisation du système MIMO

3.1.1 Structure du système MIMO

Dans toute la suite de l'étude on considère un système MIMO présenté dans la figure 3.1 constitué de T antennes à l'émission et R antennes reconfigurables à la réception. Chaque antenne réceptrice r possède comme paramètre de configuration Ω^r . La variable $\mathbf{\Omega} = [\Omega^1 \dots \Omega^R]$ est utilisée afin de regrouper la configuration totale du système de réception.

Le signal émis est écrit sous la forme d'un vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{T \times 1}$. $\mathbf{H}(\mathbf{\Omega}) \in \mathbb{C}^{R \times T}$ est le gain du

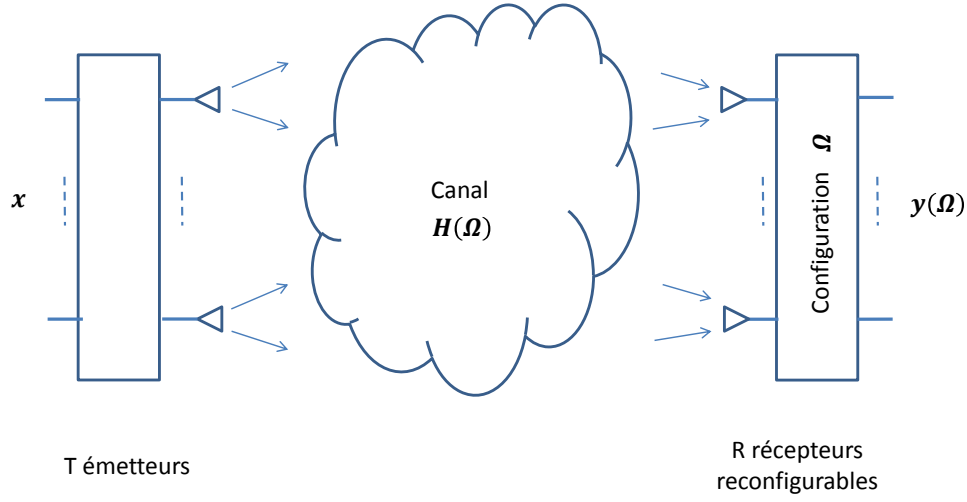


Figure 3.1 Schéma du système MIMO

canal de transmission et est fonction de la configuration des antennes d'arrivée Ω . Le signal en sortie du système est noté $\mathbf{y}(\Omega) \in \mathbb{C}^{R \times 1}$ et dépend lui aussi de Ω . Pour une entrée \mathbf{x} et une configuration Ω il est possible d'écrire la réponse du système $\mathbf{y}(\Omega)$ sous la forme :

$$\mathbf{y}(\Omega) = \mathbf{H}(\Omega) \mathbf{x} + \mathbf{z} \quad (3.1)$$

où $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^{R \times 1}$ est un bruit additif complexe gaussien circulaire de puissance N_0 , c'est-à-dire $\mathbf{z} \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}_R, N_0 \mathbf{I}_R)$.

3.1.2 Modèle du canal MIMO

Les R antennes réceptrices sont alignées et séparées d'une distance Δ_R comme pour le cas des réseaux d'antennes traités dans l'annexe A. Pour un tel système, l'angle d'arrivée ϕ peut être caractérisé par son seul cosinus que l'on note $\Theta = \cos \phi$. On utilise un modèle géométrique pour représenter le canal. L'élément de la r -ième ligne et de la t -ième colonne de la matrice de gain du canal représente le gain du canal entre l'antenne émettrice t et l'antenne réceptrice r . Pour une configuration Ω du système en réception, ce gain de canal s'exprime de la manière suivante :

$$h_{rt}(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{m=1}^M \alpha_{m,t} e^{j2\pi \Delta_R (r-1) \Theta_m} f_r(\Theta_m, \Omega) \quad (3.2)$$

M est le nombre de chemins par lequel arrive le signal. Chacun de ces chemins est défini par le cosinus de l'angle d'arrivée Θ_m et un coefficient d'atténuation $\alpha_{m,t}$ auxquels on rajoute le déphasage dû à la position de l'antenne réceptrice $2\pi\Delta_R(r-1)\Theta_m$. Les coefficients d'atténuation peuvent être déterministes ou aléatoires, le seul et unique impératif qu'on leur impose est qu'ils ne dépendent pas de la configuration Ω et qu'ils soient constants assez longtemps pour permettre l'évaluation du canal et la transmission d'information. Il doit en être de même pour les directions d'arrivée. $f_r(\Theta, \Omega)$ est le diagramme de rayonnement de l'antenne réceptrice r . Il est important de noter qu'il dépend de la configuration des autres antennes et pas uniquement de Ω^r . Ceci traduit la prise en compte du couplage.

Pour simplifier les notations on note $\alpha_{m,rt} = \alpha_{m,t}e^{j2\pi\Delta_R(r-1)\Theta_m}$, ainsi avec couplage on a :

$$h_{rt}(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{m=1}^M \alpha_{m,rt} f_r(\Theta_m, \Omega) \quad (3.3)$$

En absence de couplage le diagramme de rayonnement de l'antenne r ne dépend que de Ω^r . Les gains du canal arrivant à l'antenne r ne dépendent que de la configuration de cette antenne et l'équation (3.3) devient :

$$h_{rt}(\Omega^r) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{m=1}^M \alpha_{m,rt} f_r(\Theta_m, \Omega^r) \quad (3.4)$$

De manière générale, pour une réalisation de canal donnée (angles de départ, d'arrivée et atténuations fixés) le canal ne dépend que de la configuration des antennes. On parle quelquefois des états du canal dans la littérature où l'état fait référence à la configuration.

3.2 Principe de décomposition du canal

L'utilisation d'un modèle géométrique est extrêmement intéressante par sa linéarité avec les gains des antennes. Notre technique est complètement basée sur cette propriété : une décomposition linéaire des diagrammes de rayonnement entraîne une décomposition linéaire des gains des canaux de transmission. L'idée est de séparer les variables angulaires des variables de configurations.

3.2.1 Absence de couplage entre antennes

Décomposition du diagramme de rayonnement

Négligeons les effets de couplages. On suppose qu'il est possible de trouver N_r configurations de Ω^r notées $\Omega_1^r, \dots, \Omega_{N_r}^r$ tel qu'il existe un vecteur $\mathbf{w}_r(\Omega^r) \in \mathbb{C}^{N_r \times 1}$ vérifiant pour

l'antenne r :

$$f_r(\Theta, \Omega^r) = \mathbf{w}_r(\Omega^r)^H \mathbf{f}_{\mathbf{b}_r}(\Theta) \quad (3.5)$$

où $\mathbf{f}_{\mathbf{b}_r}(\Theta) \in \mathbb{C}^{N_r \times 1}$ contient les diagrammes de rayonnement pour les configurations précédentes

$$\mathbf{f}_{\mathbf{b}_r}(\Theta) = \begin{bmatrix} f_r(\Theta, \Omega_1^r) \\ \vdots \\ f_r(\Theta, \Omega_{N_r}^r) \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Cette décomposition suppose qu'il est donc possible de séparer les paramètres de configurations et la direction d'arrivée du signal. Les configurations $\Omega_1^r, \dots, \Omega_{N_r}^r$ sont par la suite appelées configurations de base en référence à la décomposition. De même, les diagrammes de rayonnement contenus dans $\mathbf{f}_{\mathbf{b}_r}(\Theta)$ sont nommés diagrammes de base. Le vecteur $\mathbf{w}_r(\Omega^r)$ représente les coefficients de projection des diagrammes de rayonnement sur la base formée par $\mathbf{f}_{\mathbf{b}_r}(\Theta)$. N_r est la dimension de la base de projection.

Remarque : *l'existence d'une telle décomposition est toujours possible. Pour le prouver il suffit de choisir $N_r = G_r$. Les configurations de base sont tout simplement toutes les configurations possibles. Le n -ième élément de $\mathbf{w}_r(\Omega^r)$ a alors pour valeur $w_{r,n}(\Omega^r) = 1$ si $\Omega^r = \Omega_n^r$ et 0 sinon.*

En utilisant les équations (3.4) et (3.5), il vient que :

$$h_{rt}(\Omega^r) = \mathbf{w}_r(\Omega^r)^H \mathbf{h}_{\mathbf{b}_{rt}} \quad (3.7)$$

où $\mathbf{h}_{\mathbf{b}_{rt}} \in \mathbb{C}^{N_r \times 1}$ est constitué des canaux pour les configurations de base.

$$\mathbf{h}_{\mathbf{b}_{rt}} = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{m=1}^M \alpha_{m,rt} \begin{bmatrix} f_r(\Theta_m, \Omega_1^r) \\ \vdots \\ f_r(\Theta_m, \Omega_{N_r}^r) \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$= \begin{bmatrix} h_{rt}(\Omega_1^r) \\ \vdots \\ h_{rt}(\Omega_{N_r}^r) \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Ces canaux sont désormais appelés canaux de base. De la même manière que l'on a décomposé le diagramme de rayonnement, il est possible de décomposer le gain du canal de transmission en utilisant les mêmes coefficients de projection. On montre ainsi qu'il est possible de connaître le canal quelque soit la configuration des récepteurs si l'on connaît les canaux de

base et les coefficients de projection pour un récepteur en particulier. Tout l'enjeu maintenant consiste à pouvoir décomposer les diagrammes et à estimer les canaux de base.

Définition des configurations de base complète du système de réception

Les estimateurs classiques de matrice de canal déterminent toute la matrice et non pas un unique élément : déterminer les éléments les uns à la suite des autres fait perdre un temps incommensurable. Lorsqu'un récepteur r a donc pour configuration Ω_n^r on est capable d'estimer en même temps tous les n -ième éléments des canaux de base $\mathbf{h}_{\mathbf{b}rt}$ de cette antenne. Toute la ligne de la matrice du canal correspondant à l'antenne r peut être donc reconstruite. En réalité la reconstruction peut s'étendre à toute la matrice. En effet, il faut comprendre que l'estimation ne se fait pas seulement pour une configuration particulière d'un récepteur mais pour une configuration totale du système de réception. Lorsque la configuration complète du système de réception est $\mathbf{\Omega}_n = [\Omega_n^1 \cdots \Omega_n^R]$, on estime tous les n -ième éléments de tous les $\mathbf{h}_{\mathbf{b}rt}$. Grâce aux propriétés des estimateurs, du bruit et de l'absence de couplage, l'arrangement des configurations de base entre elles pour former une configurations complète est totalement arbitraire.

En réfléchissant ainsi un problème se pose si les récepteurs ont des dimensions de décomposition différentes. On doit faire $N = \max_{1 \leq r \leq R} N_r$ estimations pour obtenir toutes les données nécessaires à la reconstruction complète de la matrice de canal. Or le nombre de configurations de base pour chaque antenne est a priori différent. Une fois que $\min_{1 \leq r \leq R} N_r$ estimations ont été faites, l'antenne ayant la plus petite dimension de décomposition a assez d'information pour reconstruire sa ligne de la matrice de canal, que faut-il donc utiliser comme configuration pour cette antenne pour les $N - \min_{1 \leq r \leq R} N_r$ estimations restantes ? On peut utiliser ce temps restant afin d'obtenir d'autres mesures de canaux de base et ainsi améliorer la précision de l'estimation. Les prochains chapitres vont s'efforcer de donner des éléments de réponse à ce problème. Il est démontré plus tard qu'il est possible d'augmenter la dimension d'une base. On peut donc imposer $N_1 = N_2 = \dots = N_R = N$. Une fois l'égalisation des dimensions des récepteurs faite, on définit les N configurations de base par $\mathbf{\Omega}_1 = [\Omega_1^1 \cdots \Omega_1^R]$, \dots , $\mathbf{\Omega}_N = [\Omega_N^1 \cdots \Omega_N^R]$. Un autre moyen pour résoudre simplement le problème est de choisir des antennes reconfigurables identiques. L'estimation de la matrice de canal pour une configuration $\mathbf{\Omega}_n$ est notée $\mathbf{H}_{\mathbf{b}n} = \mathbf{H}(\mathbf{\Omega}_n)$. Cette matrice contient tous les n -ième éléments des canaux de base $\mathbf{h}_{\mathbf{b}rt}$.

Retour sur la reconstruction de la matrice de canal

Avec (3.7), il est possible de reconstruire un élément particulier de la matrice de canal $\mathbf{H}(\boldsymbol{\Omega})$. On peut rassembler toutes ces décompositions afin d'avoir une reconstruction de la matrice en entier. Pour cela, on construit la matrice $\mathbf{H}_{\mathbf{b}} \in \mathbb{C}^{NR \times T}$ contenant tous les canaux de base :

$$\mathbf{H}_{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{\mathbf{b}1} \\ \vdots \\ \mathbf{H}_{\mathbf{b}N} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

et la matrice $\mathbf{W}(\boldsymbol{\Omega}) \in \mathbb{C}^{NR \times R}$ regroupant tous les coefficient de projection :

$$\mathbf{W}(\boldsymbol{\Omega}) = \begin{bmatrix} w_{1,1}(\Omega^1) & & (\mathbf{0}) \\ & \ddots & \\ (\mathbf{0}) & & w_{R,1}(\Omega^R) \\ & \vdots & \\ & \vdots & \\ w_{1,R}(\Omega^1) & & (\mathbf{0}) \\ & \ddots & \\ (\mathbf{0}) & & w_{R,R}(\Omega^R) \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

où $w_{r,n}(\Omega^r)$ est le n -ième élément de $\mathbf{w}_r(\Omega^r)$.

On obtient alors

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\Omega}) = \mathbf{W}(\boldsymbol{\Omega})^H \mathbf{H}_{\mathbf{b}} \quad (3.12)$$

Il est bon de remarquer pour la suite que $\|\mathbf{W}(\boldsymbol{\Omega})\|_F^2 = \sum_{r=1}^R \|\mathbf{w}_r(\Omega^r)\|_2^2$.

Les techniques mesurant le canal pour toutes les configurations possibles ont besoin de $\max_{1 \leq r \leq R} G_r$ estimations. Notre technique basée sur la décomposition des diagrammes de rayonnement a besoin de $\max_{1 \leq r \leq R} N_r$. Ainsi la méthode présentée ici devient intéressante dès que l'on est capable de trouver une dimension de décomposition $N_r \leq G_r$. En rappelant que dans le cas $N_r = G_r$ les estimations de canal faites dans les deux types de technique sont les mêmes, il est a priori possible de trouver des dimensions telles que l'inégalité précédente soit vérifiée.

3.2.2 Prise en compte du couplage

Comme on l'a expliqué précédemment, le couplage a pour effet de faire dépendre le diagramme de rayonnement de l'antenne r de la configuration totale $\boldsymbol{\Omega}$. La décomposition faite à l'équation (3.5) ne peut plus être faite pour des configurations particulières de l'antenne. Il

faut désormais trouver des configurations de base totales $\mathbf{\Omega}_1^r, \dots, \mathbf{\Omega}_{N_r}^r$ telles que :

$$f_r(\Theta, \mathbf{\Omega}) = \mathbf{w}_r(\mathbf{\Omega})^H \mathbf{f}_{\mathbf{b}_r}(\Theta) \quad (3.13)$$

avec

$$\mathbf{f}_{\mathbf{b}_r}(\Theta) = \begin{bmatrix} f_r(\Theta, \mathbf{\Omega}_1^r) \\ \vdots \\ f_r(\Theta, \mathbf{\Omega}_{N_r}^r) \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

La reconstruction des éléments de la matrice de canal est toujours possible :

$$h_{rt}(\mathbf{\Omega}) = \mathbf{w}_r(\mathbf{\Omega})^H \mathbf{h}_{\mathbf{b}_r t} \quad (3.15)$$

où

$$\mathbf{h}_{\mathbf{b}_r t} = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{m=1}^M \alpha_{rtm} \begin{bmatrix} f_r(\Theta_m, \mathbf{\Omega}_1^r) \\ \vdots \\ f_r(\Theta_m, \mathbf{\Omega}_{N_r}^r) \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$$= \begin{bmatrix} h_{rt}(\mathbf{\Omega}_1^r) \\ \vdots \\ h_{rt}(\mathbf{\Omega}_{N_r}^r) \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Les principales modifications se trouvent dans le choix des configurations de base totales et le nombre d'estimations. Précédemment la décomposition se faisait avec des configurations de base dépendant d'une antenne. On avait alors pu regrouper les configurations de base de chaque récepteur pour en faire une configuration de base totale. Avec le couplage, le regroupement n'est plus possible car les configurations de base de chaque antenne sont déjà des configurations totales du système. Le nombre d'estimations est alors $\sum_{r=1}^R N_r$ pour notre technique de décomposition. Ceci est une borne supérieure car certaines configurations de base peuvent être communes à la décomposition de différentes antennes. Le cas extrême de base commune correspond à $N_r = \prod_{r=1}^R G_r$ qui revient à décomposer tous les diagrammes sur toutes les configurations possibles de chaque antenne. Une meilleure borne pour le nombre d'estimations pour la technique proposé est donc $\min \left(\sum_{r=1}^R N_r, \prod_{r=1}^R G_r \right)$. La mesure des canaux pour tous les regroupements possibles de configurations de chaque antenne est $\prod_{r=1}^R G_r$. Encore une fois la décomposition du canal permet a priori de diminuer le nombre d'estimations. Cette question trouve une solution dans les simulations du chapitre 6.

3.3 Résumé de la technique

3.3.1 Récapitulatif de la technique et discussion sur la dimension de la base

Cette technique est basée sur un modèle géométrique de canal. Elle se résume en trois étapes :

- décomposition des diagrammes de rayonnement : déterminer N , les configurations de base et les coefficients de projection. Cette étape est faite avant l'utilisation de l'antenne ;
- estimation des canaux de base ;
- reconstruction de la matrice de canal pour une configuration quelconque et maximisation des performances du système.

L'avantage de cette méthode de configuration est de pouvoir diminuer le nombre d'estimations nécessaires à la configuration du récepteur et son principal inconvénient est d'augmenter la complexité.

La dimension de la base est le paramètre permettant un compromis entre la complexité de calcul et le nombre d'estimations. Si la base est surdimensionnée le nombre d'estimations peut devenir très important et ne présente plus aucun intérêt. En effet, augmenter la base équivaut au bout d'un moment à estimer la matrice de canal pour toutes les configurations ($N_r = G_r$). Par contre, la quantité de calculs nécessaires à la reconstruction des canaux augmente. Inversement, la diminution de la base compense la diminution du nombre de calculs par l'augmentation du nombre de reconstructions. Un autre problème est que la dimension va conditionner l'erreur qui est faite sur la reconstruction du canal.

3.3.2 Comment maximiser la capacité ?

La dernière étape de notre technique consiste à reconstruire la matrice de canal et à déterminer la configuration maximisant les performances du système. On va ici se concentrer sur la maximisation de la capacité ou du moins d'une de ces bornes.

Le signal reçu s'écrit selon (3.1) :

$$\mathbf{y}(\boldsymbol{\Omega}) = \mathbf{H}(\boldsymbol{\Omega}) \mathbf{x} + \mathbf{z} \quad (3.18)$$

Lorsque que l'on a une connaissance parfaite du canal à la réception et aucune à la transmission, la capacité d'un tel système s'écrit sous la forme :

$$C(\boldsymbol{\Omega}) = \log_2 \det \left[\mathbf{I}_R + \frac{\mathcal{P}}{TN_0} \mathbf{H}(\boldsymbol{\Omega}) \mathbf{H}(\boldsymbol{\Omega})^H \right] \quad (3.19)$$

où $\mathcal{P} = \text{Tr}(\mathbf{x}\mathbf{x}^H) = \mathbf{x}^H\mathbf{x}$ est la puissance du signal émis par les T transmetteurs.

Le but de la reconfiguration est de trouver la configuration qui maximise la capacité. Pour certains systèmes de télécommunications la capacité est directement fonction de $\rho(\mathbf{\Omega}) = \|\mathbf{H}(\mathbf{\Omega})\|_F^2$. Maximiser la capacité de tel système revient donc directement à maximiser la norme de la matrice de gain.

Voici quelques exemples de ces systèmes et de leur capacité correspondante donnés dans [28] et [29] :

– système MISO :

$$C_{MISO}(\mathbf{\Omega}) = \log_2 \left[1 + \frac{\mathcal{P}}{TN_0} \rho(\mathbf{\Omega}) \right] \quad (3.20)$$

– système SIMO :

$$C_{SIMO}(\mathbf{\Omega}) = \log_2 \left[1 + \frac{\mathcal{P}}{N_0} \rho(\mathbf{\Omega}) \right] \quad (3.21)$$

– système MIMO avec OSTBC :

$$C_{MIMO}^{OSTBC}(\mathbf{\Omega}) = \tau \log_2 \left[1 + \frac{\mathcal{P}}{TN_0} \rho(\mathbf{\Omega}) \right] \quad (3.22)$$

où τ est le nombre de symboles transmis par bloc

A fortiori ce constat est vrai pour un système SISO. Pour ce genre de système l'étude porte exclusivement sur la recherche et la maximisation d'un estimateur $\rho(\mathbf{\Omega})$ construit à partir d'un estimateur de la matrice de canal. Il est très intéressant de voir que dans ces cas il est possible de réécrire cette norme comme une somme des normes des gains de canal de chaque récepteur :

$$\rho(\mathbf{\Omega}) = \sum_{r=1}^R \sum_{t=1}^T |h_{rt}(\Omega^r)|^2 \quad (3.23)$$

$$= \sum_{r=1}^R \rho_r(\Omega^r) \quad (3.24)$$

avec $\rho_r(\Omega^r) = \sum_{t=1}^T |h_{rt}(\Omega^r)|^2$.

L'optimisation peut donc être faite indépendamment pour chaque récepteur. Ceci est directement lié au découplage des antennes.

Pour les autres systèmes MIMO, il faut travailler directement sur la maximisation du

déterminant de l'équation (3.19). Ce déterminant pour un système MIMO 2×2 s'écrit :

$$1 + \frac{\mathcal{P}}{TN_0} \rho(\boldsymbol{\Omega}) + \frac{\mathcal{P}^2}{T^2 N_0^2} |h_{11}(\Omega^1)|^2 |h_{22}(\Omega^2)|^2 + \frac{\mathcal{P}^2}{T^2 N_0^2} |h_{12}(\Omega^1)|^2 |h_{21}(\Omega^2)|^2 - 2 \frac{\mathcal{P}^2}{T^2 N_0^2} \operatorname{Re} \{ h_{11}(\Omega^1) h_{12}^*(\Omega^1) h_{21}^*(\Omega^2) h_{22}(\Omega^2) \} \quad (3.25)$$

La maximisation de ce terme est beaucoup plus complexe car il fait intervenir un produit de termes dépendant des configurations des deux récepteurs. Ce terme représente en quelque sorte la corrélation du canal. Il est le seul pouvant être négatif et peut donc affecter de manière néfaste la capacité du canal. Il n'est donc plus envisageable de séparer l'optimisation de chaque antenne.

L'utilisation d'antennes reconfigurables est motivée par la volonté de maximiser le gain de l'antenne et/ou de décorréler le canal. Une autre borne de la capacité est donnée en (4.79) pour un cas de connaissance erronée du canal à la réception. Cette autre borne va cependant se montrer assez difficile à calculer, c'est pour cette raison que l'on garde comme critère de sélection la maximisation de la norme ou la maximisation du déterminant avec une connaissance parfaite de la matrice de canal.

Conclusions du chapitre 3

Notre technique résumée dans 3.3 a pour but de diminuer le nombre d'estimations nécessaire à la détermination de la matrice quelque soit la configuration des antennes. Elle se base sur une décomposition des diagrammes de rayonnement des récepteurs. Cette décomposition par linéarité du modèle géométrique des canaux se propage à la matrice de canal. Le tableau 3.1 récapitule le nombre d'estimations dont on a besoin selon la technique employée (estimations du canal pour toutes les configurations ou décomposition) et la prise en compte du couplage.

Tableau 3.1 Nombre d'estimations selon la technique et la prise en compte du couplage

	Tech. existant	Tech. présenté
avec couplage	$\prod_{r=1}^R G_r$	$\leq \sum_{r=1}^R N_r$
sans couplage	$\max_{1 \leq r \leq R} G_r$	$\max_{1 \leq r \leq R} N_r$

Notre technique montre qu'il est a priori possible de diminuer le nombre d'estimations du canal si une décomposition est possible. Une fois le canal connu pour n'importe quelle configuration, si la capacité est le paramètre à optimiser, on a indiqué que sa maximisation

est semblable à la maximisation de la norme de la matrice de canal ou la maximisation du déterminant. De plus, en absence de couplage comme c'est le cas dans la suite de notre étude, la maximisation peut se faire séparément pour chaque antenne. Ce n'est pas le cas pour le déterminant.

Dans le prochain chapitre, on introduit les effets des erreurs d'estimations des canaux de base et d'une mauvaise reconstruction.

Remarque : *la technique est présentée pour des antennes reconfigurables placées en réception. Si elles se trouvent à l'émission la décomposition du canal est toujours possible. L'optimisation des performances est alors possible s'il existe un moyen pour l'émetteur de connaître les canaux de base.*

CHAPITRE 4

ERREURS D'ESTIMATION ET DE RECONSTRUCTION DU CANAL

Le calcul de la capacité a montré que la connaissance de la matrice de canal ou bien sa norme est nécessaire au fonctionnement de notre technique. Leur détermination ne peut bien évidemment pas être faite sans erreur. D'une part, toutes les méthodes d'estimation de canal vues dans la revue de littérature entraînent des erreurs causées par le bruit du canal. D'autre part, la dimension choisie peut entraîner des erreurs lors de la reconstruction du canal.

Ce chapitre est une étude théorique de ces deux types d'erreur permettant d'établir des critères de décomposition utilisés par la suite dans 5.4. Après une première partie permettant d'introduire quelques notations, on va montrer l'influence de la reconstruction sans erreur sur la précision de l'estimation du canal dans 4.2. On y détermine notamment des estimateurs de la matrice de canal, de la norme du canal et du déterminant utiles au calcul de la capacité. Ensuite, dans 4.3, le problème de l'erreur de reconstruction de la matrice de canal est traité seul. On établit une relation entre l'erreur de reconstruction de la matrice et celle faite sur la décomposition des diagrammes de rayonnement. La décomposition des diagrammes de rayonnement est traitée dans le chapitre 5. Cette partie se conclut avec 4.4 sur une comparaison de l'importance de ces deux erreurs et le calcul de la capacité lorsque le canal est mal connu à la réception.

4.1 Les erreurs à prendre en compte

Notre technique est soumise à deux types d'erreur. La première erreur provient de l'estimation des canaux de base. On note \mathbf{H}_{be} l'erreur d'estimation de la matrice contenant les canaux de base :

$$\tilde{\mathbf{H}}_b = \mathbf{H}_b + \mathbf{H}_{be} \quad (4.1)$$

La seconde erreur est causée par une décomposition erronée des digrammes de rayonnement. Pour chaque récepteur l'erreur faite sur la décomposition est $f_{r,e}(\Theta, \Omega^r)$:

$$\mathbf{w}_r(\Omega^r)^H \mathbf{f}_{br}(\Theta) = f_r(\Theta, \Omega^r) + f_{r,e}(\Theta, \Omega^r) \quad (4.2)$$

Par construction pour chaque configuration de base Ω_n^r , $f_{r,e}(\Theta, \Omega_n^r) = 0$.

Pour déterminer le canal pour une configuration quelconque on utilise la relation suivante

qui combine ces erreurs :

$$\tilde{\mathbf{H}}(\Omega) = \mathbf{W}(\Omega)^H \tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{b}} \quad (4.3)$$

$$= \mathbf{W}(\Omega)^H \mathbf{H}_{\mathbf{b}} + \mathbf{W}(\Omega)^H \mathbf{H}_{\mathbf{be}} \quad (4.4)$$

Or

$$\mathbf{W}(\Omega)^H \mathbf{H}_{\mathbf{b}} = \mathbf{H}(\Omega) + \mathbf{H}_{rec}(\Omega) \quad (4.5)$$

où les éléments de $\mathbf{H}_{rec}(\Omega)$ sont $h_{rec,rt}(\Omega^r) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{m=1}^M \alpha_{mrt} f_{r,e}(\Theta_m, \Omega^r)$

En résumé,

$$\tilde{\mathbf{H}}(\Omega) = \mathbf{H}(\Omega) + \mathbf{H}_{rec}(\Omega) + \mathbf{H}_{est}(\Omega) \quad (4.6)$$

avec $\mathbf{H}_{est}(\Omega) = \mathbf{W}(\Omega)^H \mathbf{H}_{\mathbf{be}}$.

Le canal reconstruit $\tilde{\mathbf{H}}(\Omega)$ est donc composé de la vraie valeur du canal $\mathbf{H}(\Omega)$, de l'erreur de reconstruction $\mathbf{H}_{rec}(\Omega)$ et de l'erreur d'estimation $\mathbf{H}_{est}(\Omega)$. Lorsque que l'on parle d'erreur d'estimation, on fait en réalité référence à l'erreur d'estimation après reconstruction.

4.2 Erreur d'estimation

Supposons tout d'abord qu'il n'y ait pas d'erreur de reconstruction. Il faut déterminer la matrice de canaux de base. Pour cela, l'estimateur que l'on va prendre est l'estimateur moindré carré présenté dans [12]. Il utilise une séquence d'apprentissage et on connaît des caractéristiques sur l'erreur effectuée.

4.2.1 Estimateur moindré carré

La trame du signal envoyé est divisée en S intervalles de temps. Chaque intervalle correspond à l'envoi d'un signal \mathbf{x} . Comme présentée dans la figure 4.1, cette trame est composée d'une partie permettant l'estimation des canaux de base. Il y a N estimations à faire et chacune est faite à partir d'une séquence d'apprentissage étalée sur D intervalles de temps. L'autre partie est constituée des données qui est donc sur $S - ND$ intervalles.

Pour chaque canal de base, D intervalles de temps sont utilisés. L'estimation est uniquement possible si $D \geq T$. On a alors pour chaque configuration de base Ω_n comme signal reçu :

$$\mathbf{Y}_n = \mathbf{H}_{\mathbf{b}_n} \mathbf{X} + \mathbf{Z}_n \quad (4.7)$$

avec $\mathbf{Y}_n \in \mathbb{C}^{R \times D}$ l'ensemble des signaux reçus pour la configuration Ω_n , $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{T \times D}$ la séquence d'apprentissage de puissance totale $\|\mathbf{X}\|_F^2 = DP$, $\mathbf{Z}_n \in \mathbb{C}^{R \times D}$ le bruit dont chaque

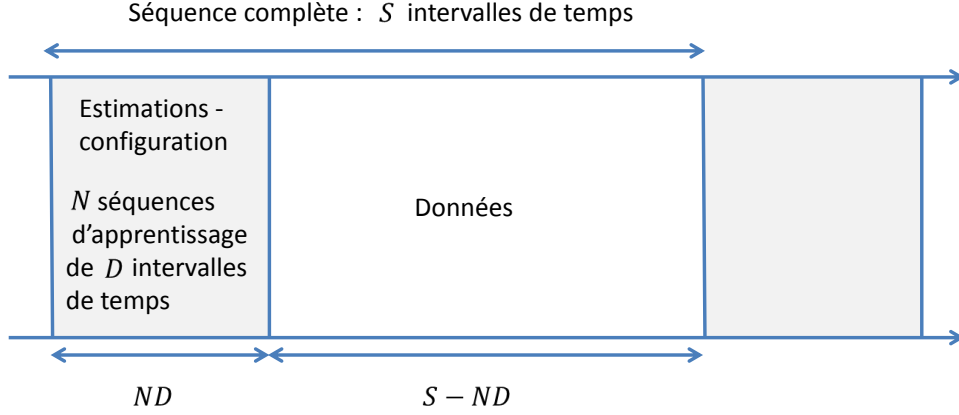


Figure 4.1 Structure de la trame transmise

élément est indépendant et suit la loi $\sim \mathcal{CN}(0, N_0)$ et finalement $\mathbf{H}_{\mathbf{b}n} \in \mathbb{C}^{R \times T}$ la matrice de gain du canal de base à estimer.

Connaissant \mathbf{X} et \mathbf{Y}_n , il est possible d'estimer la matrice de canal en minimisant l'erreur quadratique moyenne :

$$\tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{b}n} = \mathbf{Y}_n \mathbf{X}^\dagger \quad (4.8)$$

avec $\mathbf{X}^\dagger = \mathbf{X}^H (\mathbf{X} \mathbf{X}^H)^{-1}$ la matrice pseudo-inverse de \mathbf{X} .

Dans [12], la séquence d'apprentissage suivante est exploitée :

$$\mathbf{X} = \sqrt{\frac{\mathcal{P}}{T}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \beta_D & \dots & \beta_D^{(D-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \beta_D^{(T-1)} & \dots & \beta_D^{(D-1)(T-1)} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

avec $\beta_D = e^{j2\pi/D}$.

Cette séquence possède des propriétés d'orthogonalité qui minimisent l'erreur d'estimation. Il est expliqué dans [12] qu'une séquence minimisant l'erreur d'estimation doit vérifier la relation suivante :

$$\mathbf{X} \mathbf{X}^H = \frac{D\mathcal{P}}{T} \mathbf{I}_T \quad (4.10)$$

La séquence donnée en (4.9) vérifie bien cette propriété. L'orthogonalité des lignes du signal d'apprentissage simplifie grandement le calcul de \mathbf{X}^\dagger qui devient $\frac{T}{D\mathcal{P}} \mathbf{X}^H$. L'estimateur

du canal s'écrit alors :

$$\tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{b}_n} = \mathbf{H}_{\mathbf{b}_n} + \frac{T}{D\mathcal{P}} \mathbf{Z}_n \mathbf{X}^H \quad (4.11)$$

Comme la même séquence d'apprentissage est utilisée pour chaque configuration de base,

$$\tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{b}} = \mathbf{H}_{\mathbf{b}} + \frac{T}{D\mathcal{P}} \mathbf{Z} \mathbf{X}^H \quad (4.12)$$

avec

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{Z}_N \end{bmatrix}$$

Le canal estimé reconstruit est donc :

$$\tilde{\mathbf{H}}(\Omega) = \mathbf{W}(\Omega)^H \tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{b}} \quad (4.13)$$

En faisant apparaitre l'erreur d'estimation des canaux de base , on a :

$$\tilde{\mathbf{H}}(\Omega) = \mathbf{H}(\Omega) + \mathbf{H}_{est}(\Omega) \quad (4.14)$$

où l'erreur d'estimation après reconstruction est :

$$\mathbf{H}_{est}(\Omega) = \frac{T}{D\mathcal{P}} \mathbf{W}(\Omega)^H \mathbf{Z} \mathbf{X}^H \quad (4.15)$$

Comme on pouvait s'y attendre cette erreur dépend du rapport signal à bruit à l'émission [12] mais aussi des coefficients de reconstruction et du nombre de mesures effectuées. Le calcul de la covariance de l'erreur est fait dans la partie suivante. La norme de l'erreur d'estimation déterminée en (4.31) permet une meilleure compréhension de l'influence des coefficients de projection.

4.2.2 Covariance de l'estimateur de la matrice de canal

On cherche à déterminer pour une réalisation particulière de canal la matrice de covariance de l'erreur d'estimation suite à la reconstruction :

$$\mathbb{E} \left\{ \text{vec} \{ \mathbf{H}_{est}(\Omega) \} \text{vec} \{ \mathbf{H}_{est}(\Omega) \}^H \right\}$$

Ce calcul est similaire à celui [13] et fait intervenir une propriété de l'opérateur $\text{vec} \{ \cdot \}$

qui est

$$\text{vec}\{\mathbf{ABC}\} = (\mathbf{C}^T \otimes \mathbf{A}) \text{vec}\{\mathbf{B}\}$$

En utilisant deux fois cette propriété sur $\text{vec}\{\mathbf{H}_{est}(\boldsymbol{\Omega})\}$, on a alors :

$$\text{vec}\{\mathbf{H}_{est}(\boldsymbol{\Omega})\} = \text{vec}\left\{\frac{T}{D\mathcal{P}}\mathbf{W}(\boldsymbol{\Omega})^H \mathbf{Z}\mathbf{X}^H\right\} \quad (4.16)$$

$$= \frac{T}{D\mathcal{P}} \left(\mathbf{I}_T \otimes \mathbf{W}(\boldsymbol{\Omega})^H\right) \text{vec}\{\mathbf{Z}\mathbf{X}^H\} \quad (4.17)$$

$$= \frac{T}{D\mathcal{P}} \left(\mathbf{I}_T \otimes \mathbf{W}(\boldsymbol{\Omega})^H\right) (\mathbf{X}^* \otimes \mathbf{I}_{NR}) \text{vec}\{\mathbf{Z}\} \quad (4.18)$$

Cependant $\text{vec}\{\mathbf{Z}\} \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}_{NDR}, N_0 \mathbf{I}_{NDR})$ car tous les éléments de $\text{vec}\{\mathbf{Z}\}$ sont indépendants et identiquement distribués et suivent la loi $\mathcal{CN}(0, N_0)$.

Il s'en suit que :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left\{\text{vec}\{\mathbf{H}_{est}(\boldsymbol{\Omega})\} \text{vec}\{\mathbf{H}_{est}(\boldsymbol{\Omega})\}^H\right\} \\ &= \left(\frac{T}{D\mathcal{P}}\right)^2 \left(\mathbf{I}_T \otimes \mathbf{W}(\boldsymbol{\Omega})^H\right) (\mathbf{X}^* \otimes \mathbf{I}_{NR}) \mathbb{E}\left\{\text{vec}\{\mathbf{Z}\} \text{vec}\{\mathbf{Z}\}^H\right\} \\ & \quad (\mathbf{X}^* \otimes \mathbf{I}_{NR})^H \left(\mathbf{I}_T \otimes \mathbf{W}(\boldsymbol{\Omega})^H\right)^H \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$= \frac{T^2 N_0}{D^2 \mathcal{P}^2} \left(\mathbf{I}_T \otimes \mathbf{W}(\boldsymbol{\Omega})^H\right) (\mathbf{X}^* \otimes \mathbf{I}_{NR}) (\mathbf{X}^T \otimes \mathbf{I}_{NR}) (\mathbf{I}_T \otimes \mathbf{W}(\boldsymbol{\Omega})) \quad (4.20)$$

Or $(\mathbf{X}^* \otimes \mathbf{I}_{NR}) (\mathbf{X}^T \otimes \mathbf{I}_{NR}) = \frac{D\mathcal{P}}{T} \mathbf{I}_{NRT}$ car la propriété d'orthogonalité sur la séquence d'apprentissage implique $\mathbf{X}\mathbf{X}^H = \frac{D\mathcal{P}}{T} \mathbf{I}_T$. La matrice de covariance de l'estimation des canaux après reconstruction est donc :

$$\mathbb{E}\left\{\text{vec}\{\mathbf{H}_{est}(\boldsymbol{\Omega})\} \text{vec}\{\mathbf{H}_{est}(\boldsymbol{\Omega})\}^H\right\} = \frac{TN_0}{D\mathcal{P}} \left(\mathbf{I}_T \otimes \mathbf{W}(\boldsymbol{\Omega})^H\right) (\mathbf{I}_T \otimes \mathbf{W}(\boldsymbol{\Omega})) \quad (4.21)$$

$$= \frac{TN_0}{D\mathcal{P}} \left[\mathbf{I}_T \otimes \left(\mathbf{W}(\boldsymbol{\Omega})^H \mathbf{W}(\boldsymbol{\Omega})\right)\right] \quad (4.22)$$

La matrice de covariance n'est pas très intuitive pour anticiper la précision sur l'estimation des canaux. La norme de Frobenius de cette matrice est calculée par la suite (4.31).

4.2.3 Estimation de la norme de la matrice de canal

Précédemment on a montré que la capacité de certains systèmes dépend de la norme de la matrice de canal (3.20), (3.21) et (3.22). Il faut donc trouver un estimateur de cette norme à partir de l'estimation de la matrice de canal $\tilde{\mathbf{H}}(\boldsymbol{\Omega})$. Un estimateur non-biaisé de $\rho(\boldsymbol{\Omega})$ issu

des statistiques de l'estimateur expliquées dans 4.2.4 est :

$$\tilde{\rho}(\boldsymbol{\Omega}) = \left\| \tilde{\mathbf{H}}(\boldsymbol{\Omega}) \right\|_F^2 - \mathbb{E} \left\{ \left\| \mathbf{H}_{est}(\boldsymbol{\Omega}) \mathbf{H}_{est}(\boldsymbol{\Omega})^H \right\|_F^2 \right\} \quad (4.23)$$

En effet, pour une réalisation particulière du canal, on a

$$\text{vec} \left\{ \tilde{\mathbf{H}}(\boldsymbol{\Omega}) \right\} \sim \mathcal{CN} \left(\text{vec} \left\{ \mathbf{H}(\boldsymbol{\Omega}) \right\}, \mathbb{E} \left\{ \text{vec} \left\{ \mathbf{H}_{est}(\boldsymbol{\Omega}) \right\} \text{vec} \left\{ \mathbf{H}_{est}(\boldsymbol{\Omega}) \right\}^H \right\} \right)$$

Ainsi ,

$$\mathbb{E} \left\{ \left\| \tilde{\mathbf{H}}(\boldsymbol{\Omega}) \right\|_F^2 \right\} = \mathbb{E} \left\{ \text{Tr} \left[\text{vec} \left\{ \tilde{\mathbf{H}}(\boldsymbol{\Omega}) \right\} \text{vec} \left\{ \tilde{\mathbf{H}}(\boldsymbol{\Omega}) \right\}^H \right] \right\} \quad (4.24)$$

$$= \text{Tr} \left[\mathbb{E} \left\{ \text{vec} \left\{ \tilde{\mathbf{H}}(\boldsymbol{\Omega}) \right\} \text{vec} \left\{ \tilde{\mathbf{H}}(\boldsymbol{\Omega}) \right\}^H \right\} \right] \quad (4.25)$$

$$= \text{Tr} \left[\text{vec} \left\{ \mathbf{H}(\boldsymbol{\Omega}) \right\} \text{vec} \left\{ \mathbf{H}(\boldsymbol{\Omega}) \right\}^H \right] + \text{Tr} \left[\mathbb{E} \left\{ \text{vec} \left\{ \mathbf{H}_{est}(\boldsymbol{\Omega}) \right\} \text{vec} \left\{ \mathbf{H}_{est}(\boldsymbol{\Omega}) \right\}^H \right\} \right] \quad (4.26)$$

$$= \left\| \tilde{\mathbf{H}}(\boldsymbol{\Omega}) \right\|_F^2 + \mathbb{E} \left\{ \left\| \mathbf{H}_{est}(\boldsymbol{\Omega}) \mathbf{H}_{est}(\boldsymbol{\Omega})^H \right\|_F^2 \right\} \quad (4.27)$$

Calculons le dernier terme :

$$\mathbb{E} \left\{ \left\| \mathbf{H}_{est}(\boldsymbol{\Omega}) \mathbf{H}_{est}(\boldsymbol{\Omega})^H \right\|_F^2 \right\} = \text{Tr} \left[\mathbb{E} \left\{ \text{vec} \left\{ \mathbf{H}_{est}(\boldsymbol{\Omega}) \right\} \text{vec} \left\{ \mathbf{H}_{est}(\boldsymbol{\Omega}) \right\}^H \right\} \right] \quad (4.28)$$

En prenant la trace de la matrice de covariance calculée en (4.22) :

$$\mathbb{E} \left\{ \left\| \mathbf{H}_{est}(\boldsymbol{\Omega}) \mathbf{H}_{est}(\boldsymbol{\Omega})^H \right\|_F^2 \right\} = \frac{TN_0}{D\mathcal{P}} \text{Tr} \left[\mathbf{I}_T \otimes \mathbf{W}(\boldsymbol{\Omega})^H \mathbf{W}(\boldsymbol{\Omega}) \right] \quad (4.29)$$

$$= \frac{N_0 T^2}{D\mathcal{P}} \text{Tr} \left[\mathbf{W}(\boldsymbol{\Omega})^H \mathbf{W}(\boldsymbol{\Omega}) \right] \quad (4.30)$$

$$= \frac{N_0 T^2}{D\mathcal{P}} \left\| \mathbf{W}(\boldsymbol{\Omega}) \right\|_F^2 \quad (4.31)$$

La norme de la matrice de covariance dépend de la norme des coefficients de projection : plus cette dernière est importante, plus l'erreur d'estimation est importante. De plus,

$$\left\| \mathbf{W}(\boldsymbol{\Omega}) \right\|_F^2 = \sum_{r=1}^R \left\| \mathbf{w}_r(\Omega^r) \right\|_2^2 \quad (4.32)$$

On peut donc minimiser l'erreur d'estimation de la matrice de canal après reconstruction en

minimisant la norme des coefficients de projection de chaque récepteur.

Un estimateur non-biaisé de la norme de la matrice de canal est donc :

$$\tilde{\rho}(\Omega) = \left\| \tilde{\mathbf{H}}(\Omega) \right\|_F^2 - \frac{N_0 T^2}{D\mathcal{P}} \|\mathbf{W}(\Omega)\|_F^2 \quad (4.33)$$

La séparation du problème de l'estimation à chaque récepteur s'étend aussi à l'erreur faite sur la norme. En effet, en rassemblant les termes selon chaque antenne, on a :

$$\max_{\Omega} \tilde{\rho}(\Omega) = \sum_{r=1}^R \max_{\Omega^r} \tilde{\rho}_r(\Omega^r) \quad (4.34)$$

avec

$$\tilde{\rho}_r(\Omega^r) = \left\| \tilde{\mathbf{h}}_r(\Omega^r) \right\|_F^2 - \frac{N_0 T^2}{D\mathcal{P}} \|\mathbf{w}_r(\Omega^r)\|_2^2 \quad (4.35)$$

où $\tilde{\mathbf{h}}_r(\Omega^r)$ est la ligne r de la matrice de canal.

Il est donc possible de maximiser l'estimée de la norme en maximisant chaque récepteur de manière indépendante. Ceci est une conséquence directe de la simplification du problème du couplage entre antenne.

4.2.4 Variance de l'estimateur de la norme de la matrice de canal

Variance pour chaque récepteur

On calcule ici l'erreur quadratique moyenne de la norme pour chaque récepteur pour une réalisation particulière. Pour cela, on utilise des résultats issus des loi normale et de loi du χ_2 . On redémontre par la même occasion que l'estimateur choisi est non-biaisé.

Rappel sur la loi normale : si le vecteur de variable aléatoire $\mathbf{m} \in \mathbb{C}^{T \times 1}$ suit une loi gaussienne de moyenne $\bar{\mathbf{m}} \in \mathbb{C}^{T \times 1}$ et de matrice de covariance $\sigma^2 \mathbf{I}_T$, alors la variable aléatoire $\frac{\mathbf{m}^H \mathbf{m}}{\sigma^2}$ suit une loi du χ_2 non centrée à T degrés de liberté et de paramètre $\frac{\bar{\mathbf{m}}^H \bar{\mathbf{m}}}{\sigma^2}$. L'espérance de la variable $\frac{\mathbf{m}^H \mathbf{m}}{\sigma^2}$ est $T + \frac{\bar{\mathbf{m}}^H \bar{\mathbf{m}}}{\sigma^2}$ et sa variance est $2 \left(T + 2 \frac{\bar{\mathbf{m}}^H \bar{\mathbf{m}}}{\sigma^2} \right)$. On en déduit alors que l'espérance de $\mathbf{m}^H \mathbf{m}$ est $\sigma^2 T + \bar{\mathbf{m}}^H \bar{\mathbf{m}}$ et sa variance est $2\sigma^2 (\sigma^2 T + 2\bar{\mathbf{m}}^H \bar{\mathbf{m}})$.

Appliquons ce résultat à l'estimation du canal d'un récepteur particulier qui suit une loi normale, $\tilde{\mathbf{h}}_r^H(\Omega^r) \sim \mathcal{CN}(\mathbf{h}_r^H(\Omega^r), \frac{N_0 T}{D\mathcal{P}} \|\mathbf{w}_r(\Omega^r)\|_2^2 \mathbf{I}_T)$. En remplaçant \mathbf{m} par $\tilde{\mathbf{h}}_r^H(\Omega^r)$, $\bar{\mathbf{m}}$ par $\mathbf{h}_r^H(\Omega^r)$ et σ^2 par $\frac{N_0 T}{D\mathcal{P}} \|\mathbf{w}_r(\Omega^r)\|_2^2$, il vient de manière immédiate que

$$\mathbb{E} \{ \tilde{\rho}_r(\Omega^r) \} = \rho_r(\Omega^r) \quad (4.36)$$

et

$$\mathbb{E} \{ (\tilde{\rho}_r(\Omega^r) - \rho_r(\Omega^r))^2 \} = 2 \frac{N_0 T}{D\mathcal{P}} \|\mathbf{w}_r(\Omega^r)\|_2^2 \left[\frac{N_0 T^2}{D\mathcal{P}} \|\mathbf{w}_r(\Omega^r)\|_2^2 + 2\rho_r(\Omega^r) \right] \quad (4.37)$$

Variance totale de l'estimateur de la norme

La variance totale de la norme du canal est

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \{ (\tilde{\rho}(\Omega) - \rho(\Omega))^2 \} &= \sum_{r=1}^R \mathbb{E} \{ (\tilde{\rho}_r(\Omega^r) - \rho_r(\Omega^r))^2 \} \\ &+ 2 \sum_{r=1}^{R-1} \sum_{s=r+1}^R \mathbb{E} \{ (\tilde{\rho}_r(\Omega^r) - \rho_r(\Omega^r)) (\tilde{\rho}_s(\Omega^s) - \rho_s(\Omega^s)) \} \end{aligned} \quad (4.38)$$

Or, les estimations de $\rho_r(\Omega^r)$ et de $\rho_s(\Omega^s)$ sont indépendantes pour $r \neq s$ donc

$$\mathbb{E} \{ (\tilde{\rho}_r(\Omega^r) - \rho_r(\Omega^r)) (\tilde{\rho}_s(\Omega^s) - \rho_s(\Omega^s)) \} = \mathbb{E} \{ \tilde{\rho}_r(\Omega^r) - \rho_r(\Omega^r) \} \mathbb{E} \{ \tilde{\rho}_s(\Omega^s) - \rho_s(\Omega^s) \} = 0 \quad (4.39)$$

Ainsi la variance totale est égale à la somme des variances de l'estimation pour chaque antenne :

$$\mathbb{E} \{ (\tilde{\rho}(\Omega) - \rho(\Omega))^2 \} = \sum_{r=1}^R \mathbb{E} \{ (\tilde{\rho}_r(\Omega^r) - \rho_r(\Omega^r))^2 \} \quad (4.40)$$

$$= 2 \frac{N_0 T}{D\mathcal{P}} \sum_{r=1}^R \|\mathbf{w}_r(\Omega^r)\|_2^2 \left[\frac{N_0 T^2}{D\mathcal{P}} \|\mathbf{w}_r(\Omega^r)\|_2^2 + 2\rho_r(\Omega^r) \right] \quad (4.41)$$

La variance de l'estimateur de la norme dépend aussi de la norme des coefficients de projection.

On a montré qu'en absence d'erreur de reconstruction, l'erreur d'estimation de la matrice des canaux reconstruite est fonction des coefficients de projection. Les minimisations de l'erreur de l'estimée de la matrice et de l'erreur de sa norme font tous deux intervenir la norme de ces coefficients. Par omission du couplage entre les antennes, il est possible de résoudre cette minimisation au niveau de chaque récepteur. En d'autres termes, les configurations de base en absence d'erreur de reconstruction de chaque antenne doivent être choisies afin de minimiser la norme des coefficients de projection associés.

4.2.5 Estimation du déterminant d'un système MIMO 2×2

La connaissance de la norme de la matrice du canal n'est utile que pour certains systèmes MIMO. Pour les autres, il faut maximiser directement la valeur de la capacité ou du moins la

valeur du déterminant qui se trouve à l'intérieur de son expression. On a vu dans le chapitre précédent que ce déterminant pour un système MIMO 2×2 peut s'écrire sous la forme (3.25) :

$$d(\boldsymbol{\Omega}) = 1 + \frac{\mathcal{P}}{TN_0} \rho(\boldsymbol{\Omega}) + \frac{\mathcal{P}^2}{T^2 N_0^2} |h_{11}(\Omega^1)|^2 |h_{22}(\Omega^2)|^2 + \frac{\mathcal{P}^2}{T^2 N_0^2} |h_{12}(\Omega^1)|^2 |h_{21}(\Omega^2)|^2 - 2\text{Re} \{ h_{11}(\Omega^1) h_{12}^*(\Omega^1) h_{21}^*(\Omega^2) h_{22}(\Omega^2) \}$$

L'estimateur que l'on propose utilise à la fois les estimateurs de la matrice de canal (4.13) et de sa norme (4.33) :

$$\tilde{d}(\boldsymbol{\Omega}) = 1 + \frac{\mathcal{P}}{TN_0} \tilde{\rho}(\boldsymbol{\Omega}) + \frac{\mathcal{P}^2}{T^2 N_0^2} \tilde{\rho}_{11}(\Omega^1) \tilde{\rho}_{22}(\Omega^2) + \frac{\mathcal{P}^2}{T^2 N_0^2} \tilde{\rho}_{12}(\Omega^1) \tilde{\rho}_{21}(\Omega^2) - 2\text{Re} \{ \tilde{h}_{11}(\Omega^1) \tilde{h}_{12}^*(\Omega^1) \tilde{h}_{21}^*(\Omega^2) \tilde{h}_{22}(\Omega^2) \} \quad (4.42)$$

avec $\tilde{\rho}_{rt}(\Omega^r) = \left| \tilde{h}_{rt}(\Omega^r) \right|^2 + \frac{TN_0}{D\mathcal{P}} \|\mathbf{w}_r(\Omega^r)\|_2^2$.

Montrons que cet estimateur n'est pas biaisé. Deux points sont à rappeler : premièrement, l'estimation que l'on fait de la matrice implique une indépendance entre les estimations de chaque ligne et deuxièmement, les lignes de la séquence d'apprentissage sont orthogonales. On a alors,

$$\mathbb{E} \left\{ \tilde{h}_{ru}(\Omega^r) \tilde{h}_{sv}^*(\Omega^s) \right\} = \begin{cases} h_{ru}(\Omega^r) h_{sv}^*(\Omega^s), & \text{si } r \neq s \\ h_{ru}(\Omega^r) h_{rv}^*(\Omega^r), & \text{si } r = s \text{ et } u \neq v \\ |h_{ru}(\Omega^r)|^2 + \frac{TN_0}{D\mathcal{P}} \|\mathbf{w}_r(\Omega^r)\|_2^2, & \text{si } r = s \text{ et } u = v \end{cases} \quad (4.43)$$

En appliquant ces résultats en tenant compte de l'indépendance des estimations, pour $r \neq s$:

$$\mathbb{E} \{ \tilde{\rho}_{ru}(\Omega^r) \tilde{\rho}_{sv}(\Omega^s) \} = \mathbb{E} \{ \tilde{\rho}_{ru}(\Omega^r) \} \mathbb{E} \{ \tilde{\rho}_{sv}(\Omega^s) \} \quad (4.44)$$

$$= |h_{ru}(\Omega^r)|^2 |h_{sv}(\Omega^s)|^2 \quad (4.45)$$

et pour le terme dont on prend la partie réelle :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left\{ \tilde{h}_{11}(\Omega^1) \tilde{h}_{12}^*(\Omega^1) \tilde{h}_{21}^*(\Omega^2) \tilde{h}_{22}(\Omega^2) \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ \tilde{h}_{11}(\Omega^1) \tilde{h}_{12}^*(\Omega^1) \right\} \mathbb{E} \left\{ \tilde{h}_{21}^*(\Omega^2) \tilde{h}_{22}(\Omega^2) \right\} \end{aligned} \quad (4.46)$$

$$= h_{11}(\Omega^1) h_{12}^*(\Omega^1) h_{21}^*(\Omega^2) h_{22}(\Omega^2) \quad (4.47)$$

L'estimateur du déterminant de la formule de la capacité n'est donc pas biaisé :

$$\mathbb{E} \left\{ \tilde{d}(\Omega) \right\} = d(\Omega) \quad (4.48)$$

Pour juger du bon fonctionnement de cet estimateur, on peut se fier aux simulations faites en 6.8.

4.3 Erreur de reconstruction

Dans cette partie, seule l'erreur de reconstruction est prise en compte. On va montrer qu'il est possible d'établir un lien entre l'erreur de reconstruction de la matrice de canal et l'erreur de décomposition des diagrammes de rayonnement. On va poursuivre ensuite les calculs pour la reconstruction de la norme de la matrice et voir qu'il n'est malheureusement pas possible de relier simplement cette erreur à la décomposition du diagramme de rayonnement. Le cas du déterminant n'est pas fait. On se contente comme précédemment de reprendre les valeurs minimisant la reconstruction du canal.

4.3.1 Erreur de reconstruction de la matrice de canal

On veut trouver $\mathbf{W}(\Omega)$ qui minimise l'erreur de reconstruction quelque soit l'atténuation du canal α et les directions de départ Θ^T et d'arrivée Θ :

$$\epsilon_{\mathbf{H}}^2(\Omega) = \mathbb{E}_{\alpha, \Theta} \left\{ \left\| \mathbf{H}(\Omega) - \mathbf{W}(\Omega)^H \mathbf{H}_{\mathbf{b}} \right\|_F^2 \right\} \quad (4.49)$$

D'après la définition de la norme de Frobenius :

$$\epsilon_{\mathbf{H}}^2(\Omega) = \sum_{r=1}^R \sum_{t=1}^T \mathbb{E}_{\alpha_{*,t}, \Theta} \left\{ \left| h_{rt}(\Omega^r) - \mathbf{w}_r(\Omega^r)^H \mathbf{h}_{\mathbf{b}rt} \right|^2 \right\} \quad (4.50)$$

où $\alpha_{*,t}$ désigne tous les éléments $\alpha_{1,t}, \dots, \alpha_{M,t}$ et $\mathbf{h}_{\mathbf{b}rt} = [h_{rt}(\Omega_1^r) \cdots h_{rt}(\Omega_N^r)]^T$

Il est donc possible de décomposer le problème de la minimisation de l'erreur quadratique de reconstruction du canal, en R problèmes de minimisation chacun dépendant du réglage d'une antenne. Pour chaque récepteur r , il faut en fait déterminer $\mathbf{w}_r(\Omega^r)$ qui minimise

$$\epsilon_{\mathbf{h}_{r*}}^2(\Omega^r) = \sum_{t=1}^T \mathbb{E}_{\alpha_{*,t}, \Theta} \left\{ \left| h_{rt}(\Omega^r) - \mathbf{w}_r(\Omega^r)^H \mathbf{h}_{\mathbf{b}rt} \right|^2 \right\} \quad (4.51)$$

En développant chaque élément de la somme, on a :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_{\alpha_*, t, \Theta} \left\{ \left| h_{rt}(\Omega^r) - \mathbf{w}_r(\Omega^r)^H \mathbf{h}_{\mathbf{b}rt} \right|^2 \right\} \\
&= \mathbb{E}_{\alpha_*, t, \Theta} \left\{ |h_{rt}(\Omega^r)|^2 \right\} - \mathbf{w}_r(\Omega^r)^H \mathbb{E}_{\alpha_*, t, \Theta} \left\{ h_{rt}(\Omega^r)^* \mathbf{h}_{\mathbf{b}rt} \right\} \\
&\quad - \mathbb{E}_{\alpha_*, t, \Theta} \left\{ h_{rt}(\Omega^r) \mathbf{h}_{\mathbf{b}rt}^H \right\} \mathbf{w}_r(\Omega^r) + \mathbf{w}_r(\Omega^r)^H \mathbb{E}_{\alpha_*, t, \Theta} \left\{ \mathbf{h}_{\mathbf{b}rt} \mathbf{h}_{\mathbf{b}rt}^H \right\} \mathbf{w}_r(\Omega^r) \quad (4.52)
\end{aligned}$$

Tous ces termes font intervenir un calcul de la forme $\mathbb{E}_{\alpha_*, t, \Theta} \{ h_{rt}(\omega_p) h_{rt}(\omega_q)^* \}$ où ω_p et ω_q sont soit des configurations de base, soit Ω^r . Pour pouvoir faire le calcul de cette valeur, on doit poser des hypothèses. On considère qu'à l'émission il y a un réseau d'antennes omnidirectionnelles linéaires uniformes tel que

$$\alpha_{m,t} = \alpha_m e^{-j2\pi\Delta_T(t-1)\Theta_m^T} \quad (4.53)$$

où Δ_T est l'écart entre les antennes de transmission et Θ_m^T la direction d'émission du signal.

On suppose de plus que les directions d'arrivée $\{\Theta_m\}$ ainsi que les directions de départ $\{\Theta_m^T\}$ sont chacune indépendantes et identiquement distribuées. Il en est de même pour les facteurs d'atténuation $\{\alpha_m\}$ et on souhaite que $\mathbb{E}_{\alpha_u, \alpha_v} \{\alpha_u \alpha_v^*\} = \sigma_\alpha^2 \delta_{uv}$. Enfin, on impose qu'il y ait indépendance entre les $\{\alpha_m\}$, les $\{\Theta_m\}$ et les $\{\Theta_m^T\}$.

En utilisant (3.4), il s'ensuit :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_{\alpha_*, t, \Theta} \{ h_{rt}(\Omega_p^r) h_{rt}(\omega_q)^* \} \\
&= \frac{1}{M} \sum_{u=1}^M \sum_{v=1}^M \mathbb{E}_{\alpha_u, \alpha_v} \{ \alpha_u \alpha_v^* \} \mathbb{E}_{\Theta_u^T, \Theta_v^T} \left\{ e^{j2\pi\Delta_T(t-1)(\Theta_v^T - \Theta_u^T)} \right\} \\
&\quad \mathbb{E}_{\Theta_u, \Theta_v} \left\{ e^{j2\pi\Delta(t-1)(\Theta_u - \Theta_v)} f_r(\Theta_u, \omega_p) f_r(\Theta_v, \omega_q)^* \right\} \quad (4.54)
\end{aligned}$$

$$= \frac{\sigma_\alpha^2}{M} \sum_{m=1}^M \mathbb{E}_{\Theta_m} \{ f(\Theta_m, \omega_p) f(\Theta_m, \omega_q)^* \} \quad (4.55)$$

$$= \sigma_\alpha^2 \mathbb{E}_{\Theta} \{ f(\Theta, \omega_p) f(\Theta, \omega_q)^* \} \quad (4.56)$$

où Θ suit la même loi de distribution que les $\{\Theta_m\}$.

Remarque : l'indépendance entre les directions d'émission et les directions de réception n'est pas nécessaire pour le passage de (4.54) à (4.55). Les facteurs dépendant des directions n'ont pas besoin d'être séparés. Seule l'indépendance de l'atténuation avec ces directions est nécessaire ainsi que la décorrélation des α_m entre eux.

On a donc

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{\alpha_*, t, \Theta} \left\{ \left| h_{rt}(\Omega^r) - \mathbf{w}_r(\Omega^r)^H \mathbf{h}_{brt} \right|^2 \right\} \\ &= \sigma_\alpha^2 \left[\mathbb{E}_\Theta \{ |f_r(\Theta, \Omega^r)|^2 \} - \mathbf{w}_r(\Omega^r)^H \mathbb{E}_\Theta \{ f_r(\Theta, \Omega^r)^* \mathbf{f}_{br}(\Theta) \} \right. \\ & \quad \left. - \mathbb{E}_\Theta \{ f_r(\Theta, \Omega^r) \mathbf{f}_{br}(\Theta)^H \} \mathbf{w}_r(\Omega^r) + \mathbf{w}_r(\Omega^r)^H \mathbb{E}_\Theta \{ \mathbf{f}_{br}(\Theta) \mathbf{f}_{br}(\Theta)^H \} \mathbf{w}_r(\Omega^r) \right] \end{aligned} \quad (4.57)$$

$$= \sigma_\alpha^2 \mathbb{E}_\Theta \left\{ \left| f_r(\Theta, \Omega^r) - \mathbf{w}_r(\Omega^r)^H \mathbf{f}_{br}(\Theta) \right|^2 \right\} \quad (4.58)$$

et finalement

$$\epsilon_{\mathbf{h}_{r*}}^2(\Omega^r) = T\sigma_\alpha^2 \mathbb{E}_\Theta \left\{ \left| f_r(\Theta, \Omega^r) - \mathbf{w}_r(\Omega^r)^H \mathbf{f}_{br}(\Theta) \right|^2 \right\} \quad (4.59)$$

La minimisation de cette fonction est étudiée dans 5.1.2 et, pour une antenne reconfigurable quelconque, on obtient :

$$\mathbf{w}_r(\Omega^r) = \mathbf{B}_r^{-1} \mathbf{b}_r(\Omega^r) \quad (4.60)$$

avec

$$\mathbf{B}_r = \mathbb{E}_\Theta \left\{ \mathbf{f}_{br}(\Theta) \mathbf{f}_{br}(\Theta)^H \right\} \quad (4.61)$$

et

$$\mathbf{b}_r(\Omega^r) = \mathbb{E}_\Theta \{ f_r(\Theta, \Omega^r)^* \mathbf{f}_{br}(\Theta) \} \quad (4.62)$$

Pour cette valeur de coefficient de projection, l'erreur quadratique moyenne pour chaque antenne réceptrice est

$$\epsilon_{\mathbf{h}_{r*}}^2(\Omega^r) = T\sigma_\alpha^2 \left[\mathbf{s}_r(\Omega^r) - \mathbf{b}_r(\Omega^r)^H \mathbf{B}_r^{-1} \mathbf{b}_r(\Omega^r) \right] \quad (4.63)$$

où

$$s_r(\Omega^r) = \mathbb{E}_\Theta \{ |f_r(\Theta, \Omega^r)|^2 \} \quad (4.64)$$

Il n'est pas possible d'établir un lien entre l'erreur de reconstruction et la norme des coefficients de projection. Ceci nous aurait permis de traiter sans doute les deux types d'erreur de la même manière.

Tout le chapitre 5 se concentre sur la meilleure manière de minimiser l'erreur de décomposition du diagramme de rayonnement. Selon l'antenne étudiée et les données dont on dispose, différentes techniques sont présentées. Ici on a vu qu'a priori, il faut choisir la distribution de la direction d'arrivée pour faire la minimisation. Cette distribution n'est pas forcément simple à obtenir. Les simulations 6.3 vont montrer que le choix le plus sensé est de prendre

une loi uniforme même si ce n'est pas le cas réel. Cette distribution permet de ne privilégier aucune direction tout en gardant de bonnes performances et cela sans modifier les coefficients de projection ou les configurations de base même si les statistiques de la direction d'arrivée changent.

Remarque : lorsque l'on parle de distribution de la direction d'arrivée, il ne faut pas oublier que Θ n'est pas forcément l'angle. Par exemple, pour le réseau considéré dans l'annexe A, Θ est le cosinus de l'angle.

4.3.2 Erreur de reconstruction de la norme de la matrice de canal

La norme de Frobenius de la matrice de canal est très utile pour le calcul de la capacité dans certains systèmes MIMO. Dans le chapitre suivant on montre que l'on est capable de reconstruire la valeur de cette norme de manière indépendante pour chaque antenne. Théoriquement la valeur de $\mathbf{w}_r(\Omega^r)$ qui minimise l'erreur de reconstruction de cette norme $\mathbb{E}_{\alpha, \Theta} \left\{ \left(\left\| \mathbf{w}_r(\Omega^r)^H \mathbf{h}_{b,r} \right\|_F^2 - \left\| \mathbf{h}_r(\Omega^r) \right\|_F^2 \right)^2 \right\}$ pour des configurations de base données est différente du cas précédent de minimisation de l'erreur de la matrice de canal. Dans le cas de la reconstruction de $\mathbf{H}(\Omega)$, le calcul de l'erreur quadratique mène à des termes d'ordre deux qui sous certaines hypothèses permettent l'égalité avec l'erreur quadratique de décomposition des diagrammes. Ceci a été démontré dans 4.3.1 quelque soit le nombre de chemins M arrivant au récepteur.

Comme précédemment on souhaite trouver une équivalence entre l'erreur de reconstruction de la norme et l'erreur de décomposition. Le plus sensé est de chercher une équivalence de la forme $\mathbb{E}_{\alpha} \left\{ \left(\left| \mathbf{w}_r(\Omega^r)^H \mathbf{f}_{b,r}(\Theta) \right|^2 - |f_r(\Theta, \Omega^r)|^2 \right)^2 \right\}$ par exemple. Ici le calcul de l'erreur de la norme fait intervenir des termes croisés de moment d'ordre deux et quatre du canal qui s'écrivent $\mathbb{E}_{\alpha, \Theta} \{ h_{rt}(\omega_1) h_{rt}^*(\omega_2) h_{rk}^*(\omega_3) h_{rk}(\omega_4) \}$.

Calculons ce terme sous les mêmes hypothèses que dans 4.3.1, c'est-à-dire indépendance entre les directions de départ, d'arrivée et les coefficients d'atténuation.

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_{\alpha, \Theta} \{ h_{rt}(\omega_1) h_{rt}^*(\omega_2) h_{rk}^*(\omega_3) h_{rk}(\omega_4) \} \\
&= \frac{1}{M^2} \sum_{a=1}^M \sum_{b=1}^M \sum_{c=1}^M \sum_{d=1}^M \mathbb{E}_{\alpha} \{ \alpha_a \alpha_b^* \alpha_c^* \alpha_d \} \mathbb{E}_{\Theta} \left\{ e^{j2\pi\Delta_T(t-1)(\Theta_b^T - \Theta_a^T)} e^{j2\pi\Delta_T(k-1)(\Theta_c^T - \Theta_d^T)} \right\} \\
& \mathbb{E}_{\Theta} \left\{ e^{j2\pi\Delta_R(r-1)(\Theta_a - \Theta_b + \Theta_d - \Theta_c)} f_r(\Theta_a, \omega_1) f_r(\Theta_b, \omega_2)^* f_r(\Theta_c, \omega_3)^* f_r(\Theta_d, \omega_4) \right\} \quad (4.65)
\end{aligned}$$

Or

$$\mathbb{E}_{\alpha} \{ \alpha_a \alpha_b^* \alpha_c^* \alpha_d \} = \begin{cases} 2\sigma_{\alpha}^4, & \text{si } a = b = c = d \\ \sigma_{\alpha}^4, & \text{si } a = b, c = d \text{ et } a \neq d \\ \sigma_{\alpha}^4, & \text{si } a = c, b = d \text{ et } a \neq d \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.66)$$

Le terme à l'intérieur des sommes devient donc

$$\begin{cases} 2\sigma_{\alpha}^4 \mathbb{E}_{\Theta} \{ f_r(\Theta_a, \omega_1) f_r(\Theta_a, \omega_2)^* f_r(\Theta_a, \omega_3)^* f_r(\Theta_a, \omega_4) \}, & \text{si } a = b = c = d \\ \sigma_{\alpha}^4 \mathbb{E}_{\Theta} \{ f_r(\Theta_a, \omega_1) f_r(\Theta_a, \omega_2)^* f_r(\Theta_d, \omega_3)^* f_r(\Theta_d, \omega_4) \}, & \text{si } a = b, c = d \text{ et } a \neq d \\ \sigma_{\alpha}^4 |J_{\Theta_T}(k-t)|^2 \mathbb{E}_{\Theta} \{ f_r(\Theta_a, \omega_1) f_r(\Theta_b, \omega_2)^* f_r(\Theta_c, \omega_3)^* f_r(\Theta_d, \omega_4) \}, & \text{si } a = c, b = d \text{ et } a \neq d \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.67)$$

où $J_{\Theta_T}(k-t) = \mathbb{E}_{\Theta^T} \left\{ e^{j2\pi\Delta_T(k-t)\Theta^T} \right\}$.

En dénombrant le nombre de fois où chaque cas intervient, on peut voir que les termes n'ont pas la même dépendance en M : $\{a = b = c = d\}$ intervient M fois alors que $\{a = b, c = d \text{ et } a \neq d\}$ et $\{a = c, b = d \text{ et } a \neq d\}$ M^2 fois chacun. Partant de ce constat la valeur optimale de $\mathbf{w}_r(\Omega^r)$ pour minimiser l'erreur de la norme dépend de M . Il existe des techniques permettant de connaître le nombre de chemins M avec une condition sur le nombre de chemin et le nombre de récepteurs. Sa détermination augmente aussi la complexité du système. Pour ces raisons on utilise la valeur qui minimise la reconstruction de la matrice de canal et non sa norme. Cette solution est certes sous optimale mais permet d'obtenir plus simplement la valeur de la norme. On évite par la même occasion de devoir avoir deux jeux de configurations de base et de coefficients de projection, l'un pour la reconstruction du canal et l'autre pour la reconstruction de la norme.

4.4 Erreurs d'estimation et de reconstruction

On souhaite désormais étudier le cas où les deux types d'erreur sont présents. Une étude théorique est difficilement réalisable. On va donc se contenter de comparer la valeur de ces deux erreurs pour savoir laquelle est la plus importante. Ceci permet de choisir le critère de minimisation qu'il faut utiliser : minimisation de l'estimation ou minimisation de la reconstruction. Selon le critère appliqué les configurations de base peuvent être différentes. Toutes les configurations de base selon le critère choisi se trouvent dans le chapitre suivant.

4.4.1 Comparaison de la valeur des deux erreurs

Pour une réalisation particulière de canal, on a

$$\mathbb{E} \left\{ \tilde{\mathbf{H}}(\Omega) \right\} = \mathbf{H}(\Omega) + \mathbf{H}_{rec}(\Omega) \quad (4.68)$$

et

$$\mathbb{E} \{ \tilde{\rho}(\Omega) \} = \|\mathbf{H}(\Omega) + \mathbf{H}_{rec}(\Omega)\|_F^2 \quad (4.69)$$

L'estimateur en moyenne a pour valeur celle du canal avec l'erreur de reconstruction. On se ramène donc au cas de la minimisation de l'erreur de reconstruction seule. En moyenne on peut donc traiter l'erreur d'estimation et l'erreur de reconstruction de manière séparée. Cependant, l'erreur de reconstruction dépend du choix des configurations de base et ces derniers conditionnent la valeur des coefficients de projection. De plus, on a vu dans 4.2 que l'erreur d'estimation est directement reliée à ces coefficients. La séparation des erreurs du canal n'est donc pas si évidente que ça.

Dans le chapitre 6 on explique à travers des simulations dans quels cas il vaut mieux minimiser les erreurs de reconstruction et dans quels cas il vaut mieux faire attention à l'erreur d'estimation. Typiquement pour un faible rapport signal à bruit il est plus sensé de regarder l'estimation du canal (4.15). Inversement, à partir d'un certain seuil l'erreur de reconstruction est la plus importante et il devient plus raisonnable de s'y intéresser.

La détermination rigoureuse de ce seuil de manière théorique est assez complexe. On va tout de même s'efforcer de déterminer son ordre de grandeur en comparant l'erreur de reconstruction et l'erreur d'estimation. Pour une réalisation particulière de canal,

$$\tilde{\mathbf{H}}(\Omega) = \mathbf{H}(\Omega) + \mathbf{H}_{rec}(\Omega) + \mathbf{H}_{est}(\Omega) \quad (4.70)$$

Un moyen pour faire cette comparaison des erreurs est de prendre la norme de chacune des erreurs et de les moyenner sur toutes les configurations possibles.

On caractérise ainsi l'erreur d'estimation par la norme de la matrice de covariance (4.31) que l'on moyenne :

$$\frac{N_0 T^2}{D\mathcal{P}} \sum_{r=1}^R \mathbb{E}_{\Omega^r} \{ \|\mathbf{w}_r(\Omega^r)\|_2^2 \}$$

L'erreur de reconstruction est quant à elle caractérisée à partir de (4.59) :

$$T\sigma_\alpha^2 \sum_{r=1}^R \mathbb{E}_{\Omega^r} \left\{ \mathbb{E}_{\Theta} \left\{ \left| f_r(\Theta, \Omega^r) - \mathbf{w}_r(\Omega^r)^H \mathbf{f}_{br}(\Theta) \right|^2 \right\} \right\}$$

Bien entendu la caractérisation ne peut se faire sans la connaissance préalable du canal : la variance des coefficients d'atténuation σ_α^2 doit être connue ainsi que la distribution de l'angle d'arrivée. On choisit une distribution uniforme et une variance unitaire. Ces paramètres sont d'ailleurs ceux utilisés dans la plupart des simulations du chapitre 6.

On souhaite savoir dans quelles conditions l'erreur de reconstruction est plus importante que l'erreur d'estimation. Mathématiquement cela se traduit par une borne inférieure sur le rapport signal à bruit dont la valeur est donnée par :

$$SNR = \frac{1}{D/T} \frac{W^2}{F^2} \quad (4.71)$$

avec $SNR = \frac{\mathcal{P}}{N_0}$,

$$W^2 = \sum_{r=1}^R \mathbb{E}_{\Omega^r} \{ \|\mathbf{w}_r(\Omega^r)\|_2^2 \}$$

et

$$F^2 = \sum_{r=1}^R \mathbb{E}_{\Omega^r} \left\{ \mathbb{E}_{\Theta} \left\{ \left| f_r(\Theta, \Omega^r) - \mathbf{w}_r(\Omega^r)^H \mathbf{f}_{br}(\Theta) \right|^2 \right\} \right\}$$

Les configurations de base et les coefficients de projection sont calculés pour minimiser l'erreur de reconstruction (4.59). Les configurations de base se trouvent utilisées dans 5.4.2. Les tableaux 4.1 et 4.2 présentent les seuils du SNR que l'on obtient en fonction de la dimension de la base et du rapport D/T . Ce rapport doit être supérieur à un pour que l'estimation soit possible. Les W^2 et F^2 sont calculés pour deux récepteurs identiques. Le tableau 4.1 est généré pour un réseau de quatre antennes de longueur normalisée deux alors que le tableau 4.2 est généré pour un réseau de huit éléments.

Tableau 4.1 Comparaison des erreurs d'estimation et de reconstruction pour réseau ULA $N = 4$ et $L = 2$

Dimension	recons. F^2	est. W^2	Seuil SNR en dB		
			$D/T = 1$	$D/T = 1,5$	$D/T = 2$
1	5,8	8,0	1,6	-0,3	-1,6
2	4,1	1,0	-6,0	-7,7	-9,0
3	1,9	1,7	-0,7	-2,4	-3,7

Remarque : les configurations de base sont choisies pour que les dimensions supérieures à N n'entraînent pas d'erreur de reconstruction $F^2 = 0$. Le seuil du SNR est à $-\infty$. Seule l'erreur d'estimation est à prendre en compte.

On considère dans la suite des SNR variant de 0 dB à 40 dB. Les résultats des tableaux

Tableau 4.2 Comparaison des erreur d'estimation et de reconstruction pour réseau ULA $N = 8$ et $L = 2$

Dimension	recons. F^2	est. W^2	Seuil SNR en dB		
			$D/T = 1$	$D/T = 1,5$	$D/T = 2$
1	13,5	4,0	-5,2	-0,3	-1,6
2	11,5	0,5	-13,6	-7,7	-9,0
3	9,1	1,1	-9,1	-0,3	-1,6
4	8,8	1,4	-8,0	-9,7	-11,0
5	7,6	2,74	-4,4	-6,2	-7,4
6	5,0	5,7	0,5	-1,3	-2,5
7	2,5	119,7	17,7	15,0	13,7

montrent que bien souvent l'erreur de reconstruction l'emporte sur l'erreur d'estimation car le seuil du rapport signal à bruit est en dessous de 0 dB. Ce constat est encore plus vrai si le rapport D/T est élevé comme le montre (4.71). Le seul cas où il faut porter son attention est le réseau de huit antennes avec une dimension de base de sept. En effet, le SNR a pour valeur environ 15 dB qui est au milieu de notre plage de rapport signal à bruit considéré.

Mis à part le cas spécifique précédemment cité, l'erreur de reconstruction est toujours la plus importante des erreurs. Le chapitre 5 s'efforce de diminuer cette erreur en se basant sur l'équivalence entre l'erreur de reconstruction de la matrice de canal et l'erreur de décomposition des diagrammes de rayonnement. Les simulations vont confirmer la présence d'un seuil du SNR pour le réseau de huit antennes avec une dimension de base de sept.

4.4.2 Calcul de la capacité avec connaissance erronée du canal au récepteur

La capacité donnée dans le chapitre 3 suppose une connaissance parfaite du canal à la réception. Dans les faits, cette hypothèse est bien entendue fausse : il y a toujours au moins l'erreur d'estimation. On généralise ici un calcul de la capacité donnée dans [30] en ajoutant une erreur de reconstruction afin de voir s'il est possible d'affiner encore plus la manière de la maximiser. Une borne inférieure de la capacité pour un canal sans mémoire est donnée par l'information mutuelle lorsque le signal émis est de moyenne nulle et de puissance totale transmise \mathcal{P} :

$$\mathcal{I}(\mathbf{y}(\Omega), \mathbf{x}) = \mathcal{H}(\mathbf{y}(\Omega)) - \mathcal{H}(\mathbf{y}(\Omega) | \mathbf{x}) \quad (4.72)$$

$$= \mathcal{H}(\mathbf{y}(\Omega)) - \mathcal{H}(\mathbf{y}(\Omega) - \tilde{\mathbf{H}}(\Omega) \mathbf{x} | \mathbf{x}) \quad (4.73)$$

$$\geq \mathcal{H}(\mathbf{y}(\Omega)) - \mathcal{H}(\mathbf{y}(\Omega) - \tilde{\mathbf{H}}(\Omega) \mathbf{x}) \quad (4.74)$$

On a $\tilde{\mathbf{H}}(\Omega) = \mathbf{H}(\Omega) + \mathbf{H}_e(\Omega)$ où $\mathbf{H}_e(\Omega) = \mathbf{H}_{rec}(\Omega) + \mathbf{H}_{est}(\Omega)$.

Pour la suite on va omettre la variable $\mathbf{\Omega}$ pour simplifier l'écriture. Rappelons que $\mathbf{z} \sim \mathcal{CN}(0, N_0 \mathbf{I}_R)$.

Calcul de $\mathcal{H}(\mathbf{y}) = \log \det \mathbb{E} \{\mathbf{y}\mathbf{y}^H\}$

$$\mathbb{E} \{\mathbf{y}\mathbf{y}^H\} = \mathbb{E} \left\{ \left(\tilde{\mathbf{H}}\mathbf{x} - \mathbf{H}_e\mathbf{x} + \mathbf{z} \right) \left(\tilde{\mathbf{H}}\mathbf{x} - \mathbf{H}_e\mathbf{x} + \mathbf{z} \right)^H \right\} \quad (4.75)$$

$$= \frac{\mathcal{P}}{T} \left(\tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{H}}^H - \tilde{\mathbf{H}}\mathbb{E} \{\mathbf{H}_e\}^H - \mathbb{E} \{\mathbf{H}_e\} \tilde{\mathbf{H}}^H + \mathbb{E} \{\mathbf{H}_e\mathbf{H}_e^H\} \right) + N_0 \mathbf{I}_R \quad (4.76)$$

$$\text{Calcul de } \mathcal{H}(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{x}) = \log \det \mathbb{E} \left\{ \left(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{x} \right) \left(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{x} \right)^H \right\}$$

$$\mathbb{E} \left\{ \left(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{x} \right) \left(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{x} \right)^H \right\} = \mathbb{E} \left\{ \left(\mathbf{z} - \mathbf{H}_e\mathbf{x} \right) \left(\mathbf{z} - \mathbf{H}_e\mathbf{x} \right)^H \right\} \quad (4.77)$$

$$= \frac{\mathcal{P}}{T} \mathbb{E} \{\mathbf{H}_e\mathbf{H}_e^H\} + N_0 \mathbf{I}_R \quad (4.78)$$

On a ainsi

$$\mathcal{I}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \geq \log \det \left[\mathbf{I}_R + \left(\tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{H}}^H - \tilde{\mathbf{H}}\mathbb{E} \{\mathbf{H}_e\}^H - \mathbb{E} \{\mathbf{H}_e\} \tilde{\mathbf{H}}^H \right) \left(\mathbb{E} \{\mathbf{H}_e\mathbf{H}_e^H\} + \frac{TN_0}{\mathcal{P}} \mathbf{I}_R \right)^{-1} \right] \quad (4.79)$$

Lorsqu'il n'y a pas d'erreur de reconstruction, la borne inférieure de la capacité du canal devient tout simplement :

$$\log \det \left[\mathbf{I}_R + \frac{\mathcal{P}}{TN_0} \tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{H}}^H \left(\mathbf{I}_R + \frac{T}{D} \mathbf{W}^H \mathbf{W} \right)^{-1} \right]$$

Dans le cas particulier des configurations de base que l'on a pour les réseaux ULA dans 5.2.3, $\mathbf{W}^H \mathbf{W} = \frac{N}{N'} \mathbf{I}_R$ où N est le nombre d'éléments du réseau et N' la dimension de la base :

$$\log \det \left[\mathbf{I}_R + \frac{\mathcal{P}}{TN_0} \frac{\tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{H}}^H}{1 + \frac{TN}{DN'}} \right]$$

Cette simplification montre que l'erreur d'estimation revient à diminuer le SNR d'un coefficient $1 + \frac{TN}{DN'}$. Plus la dimension de la base est grande, moins les erreurs affectent la capacité. En prenant $D = T$ et $N = N'$, le SNR diminue d'environ 3 dB.

Mis à part dans des cas particuliers, cette capacité est impossible à calculer. En effet, \mathbf{H}_{rec} est inconnue du récepteur (il faudrait connaître les angles d'arrivée, les coefficients d'atténuation,...). On ne peut donc pas maximiser la capacité en présence d'erreur de reconstruction et la reconfiguration des récepteurs ne peut être faite. Comme on traite ensemble les cas avec

et sans erreur de reconstruction, il est plus logique de choisir comme critère de configuration, la maximisation de la norme du canal 4.2.3 ou du déterminant estimée 4.2.5 et non pas la borne calculée ici qui est certaines fois indéterminable.

Conclusions du chapitre 4

Les deux types d'erreurs sont fonctions des configurations de base. Pour une base donnée, le calcul des coefficients de projection est fait dans le chapitre 5. On a établi que :

- l'erreur d'estimation est sensible à la norme des coefficients de projection découlant du choix des configurations de base
- l'erreur de reconstruction est sensible à l'erreur de décomposition des diagrammes à partir des configurations

Comme on va le montrer dans 5.4 la minimisation de ces deux erreurs ne mène pas aux mêmes choix des configurations de base. Ceci laisse à penser que l'erreur de décomposition ne dépend pas directement de la norme des coefficients.

On a été capable de déterminer un estimateur de la matrice de canal basé sur une estimation utilisant une séquence d'apprentissage. À partir de cet estimateur, on a pu construire un estimateur de la norme de la matrice de canal et un estimateur du déterminant de la capacité. Pour rappel, la norme et le déterminant permettent la maximisation de la capacité. En présence d'erreur de reconstruction le manque de connaissance du canal ne nous permet pas d'établir de nouveaux estimateurs pour la détermination de la norme ou du déterminant. Le seul moment où l'on peut intervenir est sur la minimisation de l'erreur de décomposition.

Enfin, on a montré que pour la plage de SNR considérée et les antennes étudiées, l'erreur de reconstruction (lorsqu'il y en a) est généralement plus importante que l'erreur d'estimation.

CHAPITRE 5

MÉTHODES DE DÉCOMPOSITION DES DIAGRAMMES DE RAYONNEMENT

La décomposition des diagrammes de rayonnement a une place essentielle pour le bon fonctionnement de notre technique. Elle permet de déterminer la dimension de la base, les configurations de base et les coefficients de projection. De plus, dans la partie précédente 4.3.1, on a vu qu'il est possible de lier directement l'erreur de reconstruction de la matrice de canal avec l'erreur de décomposition des diagrammes de rayonnement.

Ce chapitre présente différentes méthodes permettant la décomposition de diagrammes de rayonnement. Ces méthodes sont testées pour des réseaux d'antennes linéaire et l'antenne CRLH de l'annexe B. Les techniques présentées ont toujours le même but qui est de séparer le mieux possible les variables de directions et de configurations. Elles s'efforcent de trouver les meilleurs coefficients de projection pour une base donnée. Dans 5.1, on étudie la décomposition d'une antenne quelconque. Ces résultats sont ensuite affinés dans 5.2 pour le cas d'antenne où l'on possède déjà une expression du diagramme séparant les variables de directions et de configurations. Dans 5.3 est présentée une dernière méthode basée sur la décomposition SVD. Elle permet de traiter numériquement n'importe quel type d'antennes. Ces trois premières parties déterminent les coefficients de projection pour des configurations de base données. Le choix de ces configurations suit certains critères réunis dans 5.4. Ils ont déjà été partiellement présentés dans le chapitre 4 : soit on minimise l'erreur de reconstruction 4.3.1, soit on minimise l'erreur d'estimation 4.2.

5.1 Décomposition pour un cas quelconque

Cette décomposition s'applique dans un cas où on connaît de manière littérale le diagramme de rayonnement de l'antenne. Pour simplifier les notations on omet les indices r .

5.1.1 Présentation générale du problème

Pour pouvoir faire la décomposition, il faut connaître la dimension de la base N , les diagrammes de base $\mathbf{f}_b(\Theta)$ et les coefficients de projection $\mathbf{w}(\Omega)$. Notre approche du problème est la suivante : on suppose connus N et $\mathbf{f}_b(\Theta)$ et on cherche les coefficients de projection qui minimisent quelque soit Θ , $\left| f(\Theta, \Omega) - \mathbf{w}(\Omega)^H \mathbf{f}_b(\Theta) \right|^2$. Pour ce faire, on va considérer

une certaine distribution de direction d'arrivée et on veut que $\mathbf{w}(\Omega)$ soit solution de :

$$\arg \min_{\mathbf{w}(\Omega)} \mathbb{E}_{\Theta} \left\{ \left| f(\Theta, \Omega) - \mathbf{w}(\Omega)^H \mathbf{f}_b(\Theta) \right|^2 \right\} \quad (5.1)$$

Précédemment dans 4.3.1, on a montré que la distribution la plus sensée est celle correspondant à la vraie distribution d'arrivée du signal. Elle permet de minimiser l'erreur de reconstruction de la matrice de canal. Cependant, il est assez difficile de la connaître. Quand bien même on la connaîtrait, il faudrait sans cesse modifier les configurations de base et les coefficients de projection pour qu'ils s'adaptent à la distribution pouvant changer si les antennes sont mobiles. Pour cette raison, on considère une distribution quelconque pour le moment. Des simulations 6.3 montrent que la distribution uniforme est la plus sensée car aucune direction n'est privilégiée et l'erreur de reconstruction se répartit uniformément dans le domaine angulaire.

5.1.2 Calcul des coefficients de projection

On ne considère que des cas où il n'existe pas de dépendance linéaire entre les éléments de $\mathbf{f}_b(\Theta)$, c'est-à-dire il n'existe pas de vecteur non nul $\mathbf{m} \in \mathbb{C}^{N \times 1}$ tel que quelque soit Θ , $\mathbf{m}^H \mathbf{f}_b(\Theta) = 0$.

Le minimum de $\mathbb{E}_{\Theta} \left\{ \left| f(\Theta, \Omega) - \mathbf{w}(\Omega)^H \mathbf{f}_b(\Theta) \right|^2 \right\}$ est atteint lorsque

$$\mathbf{w}(\Omega) = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}(\Omega) \quad (5.2)$$

avec

$$\mathbf{B} = \mathbb{E}_{\Theta} \left\{ \mathbf{f}_b(\Theta) \mathbf{f}_b(\Theta)^H \right\} \quad (5.3)$$

et

$$\mathbf{b}(\Omega) = \mathbb{E}_{\Theta} \left\{ f(\Theta, \Omega)^* \mathbf{f}_b(\Theta) \right\} \quad (5.4)$$

Preuve :

On note

$$\epsilon^2(\Omega) = \mathbb{E}_{\Theta} \left\{ \left| f(\Theta, \Omega) - \mathbf{w}(\Omega)^H \mathbf{f}_b(\Theta) \right|^2 \right\} \quad (5.5)$$

En développant le terme au carré,

$$\epsilon^2(\Omega) = \mathbf{w}(\Omega)^H \mathbf{B} \mathbf{w}(\Omega) - \mathbf{w}(\Omega)^H \mathbf{b}(\Omega) - \mathbf{b}(\Omega)^H \mathbf{w}(\Omega) + s(\Omega) \quad (5.6)$$

avec

$$s(\Omega) = \mathbb{E}_{\Theta} \{ |f(\Theta, \Omega)|^2 \} \quad (5.7)$$

On souhaite résoudre l'équation

$$\frac{d\epsilon^2(\Omega)}{d\mathbf{w}(\Omega)} = 0 \quad (5.8)$$

Ainsi,

$$\mathbf{w}(\Omega)^H \mathbf{B} - \mathbf{b}(\Omega)^H = 0 \quad (5.9)$$

\mathbf{B} est une matrice hermitienne par construction et elle est inversible si et seulement si les éléments de $\mathbf{f}_b(\Theta)$ sont linéairement indépendants. Le minimum est donc atteint pour

$$\mathbf{w}(\Omega) = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}(\Omega) \quad (5.10)$$

Il est possible de trouver le minimum sans utiliser de dérivée. Pour cela on utilise les propriétés du produit scalaire $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \text{Tr}(\mathbf{y} \mathbf{x}^H) = \mathbf{x}^H \mathbf{y}$ et la norme associée $\|\mathbf{x}\|^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$. Si \mathbf{B} est inversible alors avec ces notations on a :

$$\epsilon^2(\Omega) = -\langle \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}(\Omega), \mathbf{b}(\Omega) \rangle + s(\Omega) + \|\mathbf{B}^{1/2} \mathbf{w}(\Omega) - \mathbf{B}^{-1/2} \mathbf{b}(\Omega)\|^2 \quad (5.11)$$

$$\geq -\langle \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}(\Omega), \mathbf{b}(\Omega) \rangle + s(\Omega) \quad (5.12)$$

Comme \mathbf{B} est une matrice hermitienne définie positive, $\mathbf{B}^{1/2}$ existe et est aussi une matrice hermitienne définie positive. On a égalité si et seulement si $\mathbf{B}^{1/2} \mathbf{w}(\Omega) - \mathbf{B}^{-1/2} \mathbf{b}(\Omega) = 0$ c'est-à-dire $\mathbf{w}(\Omega) = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}(\Omega)$.

La décomposition obtenue est applicable à des antennes quelconques mais peut mener à des résultats assez médiocres, voir les simulations 6.3. Les méthodes qui suivent offrent de bien meilleures performances. La décomposition SVD est elle aussi applicable pour n'importe quelle antenne.

5.2 Séparation avérée des variables

On propose une décomposition exacte lorsqu'il est déjà possible de séparer les variables de directions et de configurations et d'écrire le diagramme de rayonnement sous la forme :

$$f(\Theta, \Omega) = \mathbf{b}(\Omega)^H \mathbf{a}(\Theta) \quad (5.13)$$

Les vecteurs $\mathbf{b}(\Omega)$ et $\mathbf{a}(\Theta)$ sont tous deux des vecteurs colonnes de N lignes. Ce cas correspond à celui des ULA qui est le type d'antennes utilisées lors des simulations.

N est pris pour être le plus petit possible. En particulier, on ne veut pas qu'il existe de relation linéaire entre les éléments de $\mathbf{b}(\Omega)$.

On suppose que le diagramme de rayonnement se décompose de la manière suivante :

$$f(\Theta, \Omega) = \mathbf{b}'(\Omega)^H \mathbf{a}'(\Theta) \quad (5.14)$$

avec $\mathbf{b}'(\Omega) \in \mathbb{C}^{N' \times 1}$ et $\mathbf{a}'(\Theta) \in \mathbb{C}^{N' \times 1}$. On cherche le plus petit N tel qu'il existe $\mathbf{b}(\Omega) \in \mathbb{C}^{N \times 1}$ et $\mathbf{M}_{\mathbf{b}} \in \mathbb{C}^{N \times N'}$ avec $N < N'$ et $\mathbf{b}'(\Omega) = \mathbf{M}_{\mathbf{b}} \mathbf{b}(\Omega)$ c'est-à-dire qu'il existe une relation linéaire entre les éléments de $\mathbf{b}'(\Omega)$. On peut alors définir $\mathbf{a}(\Theta) = \mathbf{M}_{\mathbf{b}}^H \mathbf{a}'(\Theta)$ et avoir $f(\Theta, \Omega) = \mathbf{b}(\Omega)^H \mathbf{a}(\Theta)$ qui est de la forme désirer.

De manière symétrique, s'il existe $\mathbf{a}(\Theta) \in \mathbb{C}^{N \times 1}$ et $\mathbf{M}_{\mathbf{a}} \in \mathbb{C}^{N \times N'}$ avec $N < N'$ (N le plus petit possible) et $\mathbf{a}'(\Theta) = \mathbf{M}_{\mathbf{a}} \mathbf{a}(\Theta)$ c'est-à-dire qu'il existe une relation linéaire entre les éléments de $\mathbf{a}'(\Theta)$. En notant $\mathbf{b}(\Omega) = \mathbf{M}_{\mathbf{a}}^H \mathbf{b}'(\Omega)$ on a $f(\Theta, \Omega) = \mathbf{b}(\Omega)^H \mathbf{a}(\Theta)$.

On peut donc en conclure que la recherche de la plus petite valeur N qui permet d'enlever la dépendance entre les éléments de $\mathbf{b}(\Omega)$ mène au même résultat que la recherche de la plus petite valeur N qui permet d'enlever la dépendance entre les éléments de $\mathbf{a}(\Theta)$. En effet, si $\mathbf{M}_{\mathbf{b}}$ existe alors prenant $\mathbf{M}_{\mathbf{a}} = \mathbf{M}_{\mathbf{b}}^H$ on montre que $\mathbf{M}_{\mathbf{a}}$ existe aussi et inversement

On va étudier le cas où l'on souhaite garder N comme dimension de la base de projection et ceux où la dimension est quelconque.

5.2.1 Conservation de la dimension de la base

Pour de telles antennes la décomposition peut être faite sans aucune erreur en trois temps :

1. On construit une matrice \mathbf{B} :

$$\mathbf{B} = [\mathbf{b}(\Omega_1) \cdots \mathbf{b}(\Omega_N)] \quad (5.15)$$

où $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ sont des configurations possibles de l'antenne rendant cette matrice \mathbf{B} inversible. Du fait de la condition imposée sur N , seul le choix des configurations entraîne ou non l'inversibilité de cette matrice.

2. Le vecteur des diagrammes de base $\mathbf{f}_{\mathbf{b}}$ est déduit du choix des configurations de base

$$\mathbf{f}_{\mathbf{b}}(\Theta) = \mathbf{B}^H \mathbf{a}(\Theta) \quad (5.16)$$

3. le vecteur des coefficients $\mathbf{w}(\Omega)$ est alors

$$\mathbf{w}(\Omega) = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}(\Omega) \quad (5.17)$$

On obtient finalement

$$f(\Theta, \Omega) = \mathbf{w}(\Omega)^H \mathbf{f}_b(\Theta) \quad (5.18)$$

L'ensemble des diagrammes contenus dans $\mathbf{f}_b(\Theta)$ sont des diagrammes de rayonnement réalisables par l'antenne, cette condition n'est a priori pas vérifiée par $\mathbf{a}(\Theta)$. Si c'était le cas, il était possible de trouver des configurations telle que $\mathbf{B} = \mathbf{I}_N$.

5.2.2 Modification de la dimension

On souhaite désormais modifier la dimension de la base. La nouvelle dimension est notée N' . La matrice \mathbf{B} est toujours construite de la même manière : $\mathbf{B} = [\mathbf{b}(\Omega_1) \cdots \mathbf{b}(\Omega_{N'})]$. Son rang est inférieur ou égal à $\min(N, N')$. Avec les antennes étudiées, on est toujours capable de trouver des configurations telles que le rang soit égal à $\min(N, N')$ et ce sont les cas qui vont être considérés. Comme précédemment le vecteur des diagrammes de base est $\mathbf{f}_b(\Theta) = \mathbf{B}^H \mathbf{a}(\Theta)$.

On présente maintenant deux méthodes permettant d'expliquer la manière dont on minimise l'erreur quadratique moyenne de décomposition. L'une applique les résultats issus de l'étude d'un diagramme quelconque, l'autre est directe et s'applique uniquement aux antennes étudiées dans cette partie.

Suite des calculs des diagrammes de rayonnement quelconques

Précédemment on a vu que pour un diagramme de rayonnement quelconque on devait résoudre l'équation (5.9) issue de la dérivée de l'erreur quadratique. Cette équation avec les notations actuelles devient :

$$\mathbf{B}^H \mathbf{R}_a \mathbf{b}(\Omega) - \mathbf{B}^H \mathbf{R}_a \mathbf{B} \mathbf{w}(\Omega) = 0 \quad (5.19)$$

On a remplacé $\mathbf{b}(\Omega)$ par $\mathbf{B}^H \mathbf{R}_a \mathbf{b}(\Omega)$ et \mathbf{B} par $\mathbf{B}^H \mathbf{R}_a \mathbf{B}$ avec $\mathbf{R}_a = \mathbb{E}_{\Theta} \left\{ \mathbf{a}(\Theta) \mathbf{a}(\Theta)^H \right\}$.

Précédemment les conditions imposées au départ nous avaient permis d'inverser la matrice $\mathbf{B}^H \mathbf{R}_a \mathbf{B}$. Ici ces conditions ne sont par réunies car \mathbf{B} est de dimension quelconque. \mathbf{R}_a est quant à elle bien inversible par construction du vecteur $\mathbf{a}(\Theta)$. Cette nouvelle équation n'admet donc plus forcément de solution unique. Une technique assez classique pour résoudre ce genre de problème est de chercher à minimiser $\|\mathbf{B}^H \mathbf{R}_a \mathbf{b}(\Omega) - \mathbf{B}^H \mathbf{R}_a \mathbf{B} \mathbf{w}(\Omega)\|^2$. La minimisation de cette équation fait intervenir le pseudo-inverse de $\mathbf{B}^H \mathbf{R}_a \mathbf{B}$ qui est $\mathbf{B}^\dagger \mathbf{R}_a^{-1} \mathbf{B}^{\dagger H}$. Lorsque le problème est résolu de cette manière, la valeur optimale pour les coefficients de projection est :

$$\mathbf{w}(\Omega) = \mathbf{B}^\dagger \mathbf{R}_a^{-1} \mathbf{B}^{\dagger H} \mathbf{B}^H \mathbf{R}_a \mathbf{b}(\Omega) \quad (5.20)$$

Cette solution fait intervenir plusieurs fois la matrice pseudo-inverse \mathbf{B}^\dagger et n'utilise pas réellement le fait que les paramètres de directions et de configurations sont séparables. En effet, (5.19) peut être mis sous la forme :

$$\mathbf{B}^H \mathbf{R}_a [\mathbf{b}(\Omega) - \mathbf{B}\mathbf{w}(\Omega)] = \mathbf{0} \quad (5.21)$$

Or une solution suffisante pour ce système est donnée par

$$\mathbf{b}(\Omega) - \mathbf{B}\mathbf{w}(\Omega) = \mathbf{0} \quad (5.22)$$

On a ainsi supprimé toutes les valeurs qui dépendent des directions d'arrivée, c'est-à-dire \mathbf{R}_a . La minimisation de $\|\mathbf{b}(\Omega) - \mathbf{B}\mathbf{w}(\Omega)\|^2$ donne une solution plus simple indépendante de toute considération sur les directions d'arrivée :

$$\mathbf{w}(\Omega) = \mathbf{B}^\dagger \mathbf{b}(\Omega) \quad (5.23)$$

Cette solution a l'avantage de ne faire intervenir qu'une seule fois une pseudo-inverse. Une comparaison des résultats offerts par les deux solutions est faite plus tard.

Résolution directe

On souhaite résoudre directement la minimisation de l'erreur de décomposition, on a donc :

$$\mathbf{b}(\Omega)^H \mathbf{a}(\Theta) - \mathbf{w}(\Omega)^H \mathbf{f}_b(\Theta) = \mathbf{0} \Leftrightarrow [\mathbf{b}(\Omega) - \mathbf{B}\mathbf{w}(\Omega)]^H \mathbf{a}(\Theta) = 0 \quad (5.24)$$

Une condition suffisante pour résoudre cette équation quelque soit Θ est :

$$\mathbf{b}(\Omega) - \mathbf{B}\mathbf{w}(\Omega) = \mathbf{0} \quad (5.25)$$

On retombe directement sur l'équation de minimisation de l'erreur quadratique moyenne de décomposition. Une solution qui minimise l'erreur quadratique est donnée par (5.23) : $\mathbf{w}(\Omega) = \mathbf{B}^\dagger \mathbf{b}(\Omega)$.

Calcul de l'erreur de décomposition

Les solutions trouvées peuvent s'écrire sous la forme $\mathbf{w}(\Omega) = \mathbf{Q}\mathbf{b}(\Omega)$ avec

$$\mathbf{Q} = \mathbf{B}^\dagger \mathbf{R}_a^{-1} \mathbf{B}^{\dagger H} \mathbf{B}^H \mathbf{R}_a \quad \text{ou} \quad \mathbf{Q} = \mathbf{B}^\dagger$$

On note $f_e(\Theta, \Omega^r)$ l'erreur de décomposition du diagramme de rayonnement définie par :

$$f_e(\Theta, \Omega) = \mathbf{w}(\Omega)^H \mathbf{f}_b(\Theta) - f(\Theta, \Omega) \quad (5.26)$$

On a ainsi

$$f_e(\Theta, \Omega) = \mathbf{b}(\Omega)^H [\mathbf{Q}^H \mathbf{B}^H - \mathbf{I}_N] \mathbf{a}(\Theta) \quad (5.27)$$

Calculons maintenant cette erreur selon les valeurs de N' et de \mathbf{Q} .

- Si $N' = N$, alors $\mathbf{B}^\dagger = \mathbf{B}^{-1}$. Quelque soit la valeur que l'on a pris pour \mathbf{Q} on a $\mathbf{Q} = \mathbf{B}^{-1}$ donc il n'y a pas d'erreur de décomposition
- Si $N' > N$, alors $\mathbf{B}^\dagger = \mathbf{B}^H (\mathbf{B} \mathbf{B}^H)^{-1}$. Dans ce cas, $\mathbf{B} \mathbf{B}^\dagger = \mathbf{I}_N$. Quelque soit la valeur que l'on a pris pour \mathbf{Q} on a $\mathbf{Q} = \mathbf{B}^\dagger$ donc de même que précédemment il n'y a pas d'erreur de décomposition
- À l'inverse des situations précédentes le cas $N' < N$ implique des erreurs de décomposition qui en plus sont différentes selon les valeurs de \mathbf{Q} . On a $\mathbf{B}^\dagger = (\mathbf{B}^H \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^H$ et la relation $\mathbf{B} \mathbf{B}^\dagger = \mathbf{I}_N$ n'est plus vérifiée. En effet, le rang de $\mathbf{B} \mathbf{B}^\dagger$ est N' , celui de \mathbf{I}_N est N et $N \neq N'$. Sans cette relation, il devient impossible de faire une décomposition sans erreur. La diminution de la dimension fait perdre en quelque sorte de l'information sur le diagramme de rayonnement.

5.2.3 Application aux réseaux d'antennes linéaires

Modèle ULA et décomposition des diagrammes de rayonnement

L'antenne reconfigurable considérée est un réseau d'antennes linéaire uniforme. Il est constitué de N antennes omnidirectionnelles alignées séparées d'une distance normalisée¹ Δ . On définit par $L = N\Delta$ la longueur normalisée du réseau. Le diagramme de rayonnement d'un tel système est calculé dans l'annexe A :

$$f(\Theta, \Omega) = \mathbf{e}(\Omega)^H \mathbf{e}(\Theta) \quad (5.28)$$

où

$$\mathbf{e}(\Theta) = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{j2\pi\Delta\Theta} \\ \vdots \\ e^{j2\pi\Delta(N-1)\Theta} \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

Θ est le cosinus de l'angle d'arrivée et Ω est le cosinus de l'angle maximisé par le réseau.

1. Vraie longueur divisée par la longueur d'onde.

Ce diagramme est bien de la forme désirée (5.13).

On choisit N' configurations de base $\Omega_1, \dots, \Omega_{N'}$. La matrice \mathbf{B} contenant les valeurs de $\mathbf{e}(\Omega)$ pour les configurations de base est une matrice de Vandermonde de la forme :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \beta_1 & \cdots & \beta_{N'} \\ \beta_1^2 & \cdots & \beta_{N'}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_1^N & \cdots & \beta_{N'}^N \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

avec $\beta_n = e^{j2\pi\Delta\Omega_n}$, n compris 1 et N' . Si les β_n sont différents alors le rang de \mathbf{B} est $\min(N, N')$. Pour que tous les β_n soient différents, il ne doit pas exister au moins deux configurations Ω_p et Ω_q avec $p \neq q$ tel que $\Omega_p \equiv \Omega_q \left[\frac{1}{\Delta} \right]$.

Intéressons nous au cas $N = N'$

Dans ce cas, si \mathbf{B} est inversible, alors il existe un moyen simple pour calculer son inverse. Cette méthode fait appel aux polynômes de Lagrange et est présentée dans l'annexe C

Dans [31], des diagrammes de configurations de base $\Omega_n = \frac{n-1}{L}$ où n varie de 1 à N sont présentés. Pour de telles configurations de base l'inverse de \mathbf{B} est tout simplement \mathbf{B}^H en partie grâce à l'orthogonalité qui existe alors entre les colonnes de \mathbf{B} . Les coefficients de projection sont donc :

$$\mathbf{w}(\Omega) = \frac{1}{N} \mathbf{B}^H \mathbf{e}(\Omega) \quad (5.31)$$

et les diagrammes de base :

$$\mathbf{f}_b(\Theta) = \mathbf{B}^H \mathbf{e}(\Theta) \quad (5.32)$$

La forme des diagrammes de base et des coefficients de projection sont extrêmement similaires. C'est d'ailleurs un autre point fort de ces configurations de base. L'étude de l'un ou de l'autre donne les mêmes résultats à un coefficient N près.

Avant d'avancer plus loin dans cette étude, il est important de vérifier si les configurations de base de ce type sont bien réalisables. En effet, dans la revue de littérature, on avait dit que les déphaseurs étaient quantifiés. Pour l'antenne r du réseau, le déphaseur a pour valeur $2\pi \frac{(r-1)k}{2^K}$. On peut voir que l'on a rajouté un terme en r afin d'être cohérent avec les déphasages que l'on veut avoir $2\pi\Delta(r-1)\Omega_n = 2\pi(r-1)\frac{n}{N}$. Il existe donc k_n compris entre 0 et $2^K - 1$ correspondant à chaque configuration de base Ω_n si et seulement si N est une puissance de deux et cette puissance est inférieure à K . On a alors $k_n = n \frac{2^K}{N}$.

La valeur de Δ influe sur la présence de maximum et sur leur nombre dans le domaine

visible². Selon sa valeur, différents cas peuvent apparaître :

- $\Delta > \frac{1}{2}$ sous-échantillonnage : plusieurs maximums figure 5.1
- $\Delta = \frac{1}{2}$ cas limite : un unique maximum figure 5.2
- $\Delta < \frac{1}{2}$ sur-échantillonnage : un ou aucun maximum figure 5.3

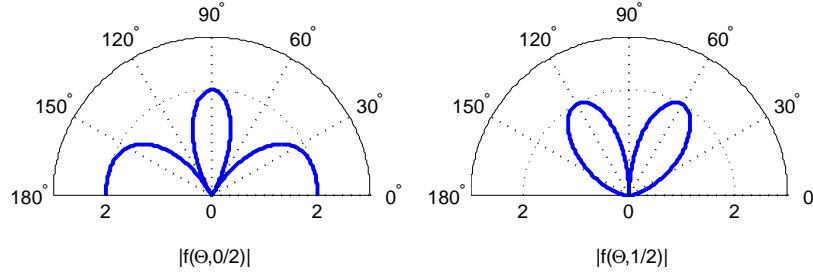


Figure 5.1 Diagrammes de rayonnement de base pour un réseau ULA $N = 2$ et $L = 2$

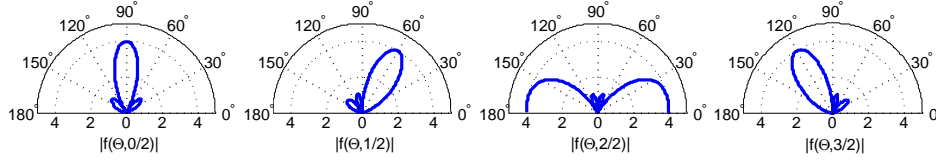


Figure 5.2 Diagrammes de rayonnement de base pour un réseau ULA $N = 4$ et $L = 2$

Le terme d'échantillonnage fait référence à la limite de Shannon pour la fréquence d'échantillonnage d'un signal. Le paramètre relatif à la longueur du réseau L est relié à la largeur des lobes. Le lobe principal a pour largeur $\frac{2}{L}$. La largeur des lobes secondaires est de $\frac{1}{L}$. Ces largeurs sont données dans le domaine du cosinus de l'angle, ce ne sont pas des angles à proprement parler.

Sur les figures 5.1, 5.2 et 5.3 sont présentés les modules des diagrammes de rayonnement de base. Pour $\Delta \geq \frac{1}{2}$ (figures 5.1 et 5.2), les diagrammes de base ont un ou plusieurs maximums dans le domaine visible. Pour $\Delta < \frac{1}{2}$, ceci n'est pas le cas pour trois des diagrammes de

2. Le domaine visible est celui dont Θ est compris entre -1 et 1 .

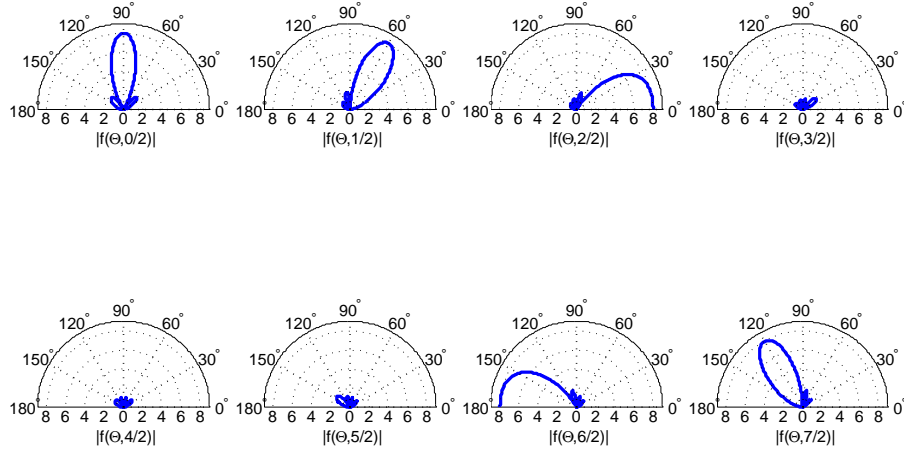


Figure 5.3 Diagrammes de rayonnement de base pour un réseau ULA $N = 8$ et $L = 2$

base (figure 5.3 3/2, 4/2 et 5/2). Comme les coefficients de projection et les diagrammes de rayonnement ont la même forme, on est en droit de se demander si garder ces trois configurations de base est vraiment utile pour la reconstruction. Le fait que certaines fois le maximum soit visible ou non a des conséquences sur les configurations considérées. Les figures 5.4 et 5.5 établissent la relation entre l'emplacement des maximums ϕ_0 dans le domaine du visible et la configuration du réseau Ω . On a choisi seize configurations c'est-à-dire $K = 4$ (ce choix est justifié dans 6.2) représenté sur les courbes avec leur indice k_n de configuration indiqué à côté. Pour $\Delta = 1$, toutes les configurations ont un maximum visible, ce qui n'est pas le cas pour les configurations dans la figure 5.5. A priori ceci rendrait les configurations du domaine non visible totalement inutiles. Or on va montrer plus loin dans ce chapitre que ces configurations font parfois partie des configurations de base. Ceci ne veut pas dire qu'elles seront souvent choisies comme configuration optimale pour autant (voir la partie 6.6.4).

La périodicité des diagrammes de rayonnement des réseaux ULA (période de $1/\Delta$) permet de replacer les configurations ayant un maximum visible dans l'intervalle $[-1, 1]$.

Exemple de configuration de base pour $N' > N$

Lorsque que l'on souhaite augmenter la taille de la base, il est possible de prendre comme configuration de base $\Omega_n = \frac{N}{N'} \frac{n-1}{L}$ où n varie de 1 à N' . Cette forme permet de garder l'orthogonalité entre les colonnes de \mathbf{B} . Ce type de configuration se rapproche d'une technique d'entrelacement de zéro en échantillonnage.

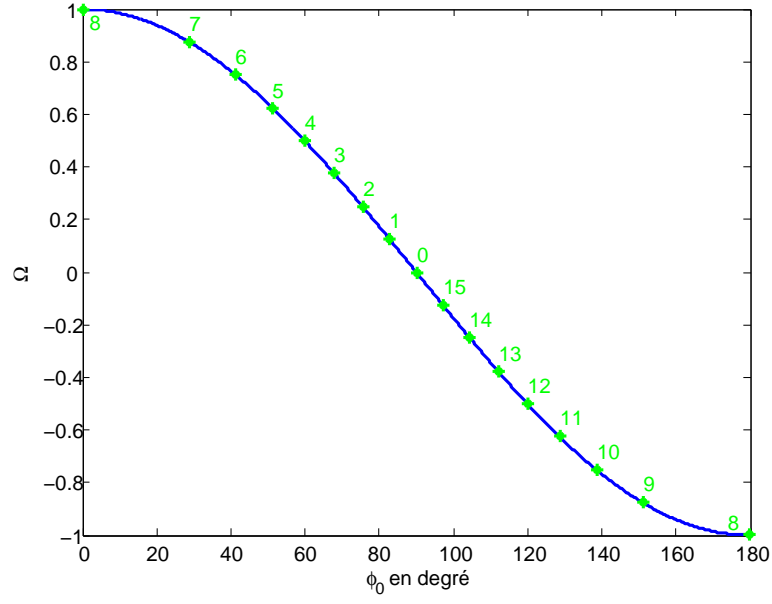


Figure 5.4 Présence de maximum pour un réseau ULA $N = 4$ et $L = 2$ avec $K = 4$

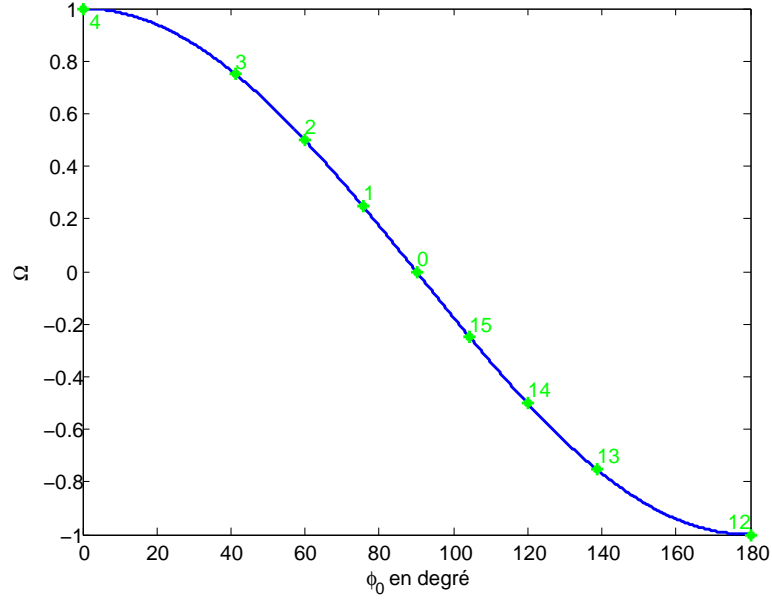


Figure 5.5 Présence de maximum pour un réseau ULA $N = 8$ et $L = 2$ avec $K = 4$

5.3 Utilisation de la décomposition SVD

Une étude numérique à partir de relevés de diagrammes d'antenne est possible. Cette méthode est basée sur la décomposition SVD et s'applique à n'importe quel type d'antennes. Les relevés de diagrammes sont regroupés sous une matrice $\mathbf{F} \in \mathbb{C}^{G \times A}$ où G le nombre de configurations étudiées. Chaque ligne de \mathbf{F} contient la mesure du diagramme selon A directions.

5.3.1 Décomposition exacte des diagrammes de rayonnement testés : SVD "compacte"

La décomposition SVD dite compacte garde uniquement les N valeurs singulières non nulles. Par une décomposition SVD traditionnelle, \mathbf{F} peut s'écrire sous la forme³

$$\mathbf{F} = \mathbf{U}^H \mathbf{S} \mathbf{V} \quad (5.33)$$

avec $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{G \times G}$, $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{A \times A}$ et $\mathbf{S} \in \mathbb{C}^{G \times A}$. Lors de la décomposition, on peut ranger les valeurs singulières de \mathbf{F} par ordre décroissant sur la diagonale de \mathbf{S} , tous les autres éléments de cette matrice sont nuls. On ne considère que les N valeurs singulières non nulles et $N = \text{rang}(\mathbf{F}) \leq \min(A, G)$. Généralement $G < A$, ainsi la matrice formée par le produit $\mathbf{S} \mathbf{V}$ a donc ces $A - G$ dernières lignes nulles. On note $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^{N \times A}$ la matrice formée par les N premières lignes de $\mathbf{S} \mathbf{V}$ et $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^{N \times G}$ les N premières colonnes de \mathbf{U} . On a alors une décomposition des diagrammes de rayonnement de l'antenne sur une base de dimension N .

$$\mathbf{F} = \mathbf{b}^H \mathbf{a} \quad (5.34)$$

En regardant de près cette équation on s'aperçoit qu'elle correspond au cas discret de (5.13). Il reste ensuite à modifier cette base pour qu'elle soit exclusivement formée par des colonnes de \mathbf{F} c'est-à-dire par de véritables diagrammes.

On cherche une matrice de passage $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{N \times N}$ entre \mathbf{a} et \mathbf{F}_b où \mathbf{F}_b est une matrice formée par N lignes de \mathbf{F} telle que $\mathbf{F}_b = \mathbf{B}^H \mathbf{a}$. Ceci est faisable à la condition que \mathbf{B} soit formée à partir de N colonnes de \mathbf{b} . Si \mathbf{B} est inversible, il découle que $\mathbf{F} = \mathbf{w}^H \mathbf{F}_b$ avec $\mathbf{w} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$. L'existence d'une matrice \mathbf{B} peut être démontrée. Par construction $\mathbf{B} = [\mathbf{b}^{(1)} \dots \mathbf{b}^{(n)}]^t$ où $\mathbf{b}^{(n)}$ représente une colonne de \mathbf{b} . Pour que \mathbf{B} soit inversible il faut que l'on choisisse nécessairement N colonnes différentes. Cette matrice inversible existe car \mathbf{U} est une matrice

3. Une décomposition SVD traditionnelle est écrite normalement sous la forme $\mathbf{F} = \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{V}^H$. On a ici pris l'hermitien des matrices \mathbf{U} et \mathbf{V}

unitaire⁴ et donc inversible. \mathbf{b} est alors de rang N et il est possible de trouver N colonnes parmi les G disponibles qui soient linéairement indépendantes.

Remarques : on peut noter que l'on a utilisé les notations \mathbf{a} et \mathbf{b} pour des matrices (et non des vecteurs) afin de montrer la ressemblance avec le cas précédent des variables de configurations et de directions séparables.

Cette méthode est extrêmement puissante car elle permet à la fois de trouver N la taille de la base et les coefficients de projection. Il est intéressant de voir que dans un cas numérique il est toujours possible de séparer les variables de directions et de configurations.

5.3.2 Décomposition approximative

À moins de cas très particuliers, si on se contente de garder les valeurs singulières strictement non nulles, on a généralement $N = G$. La décomposition perd alors tout son intérêt. Pour résoudre ce problème, il faut garder les N' valeurs singulières les plus significatives.

Une fois la dimension connue, la méthode est toujours la même : on choisit N' colonnes de \mathbf{b} pour former la matrice \mathbf{B} et construire la matrice des diagrammes de base $\mathbf{F}_{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^H \mathbf{a}$. Il reste alors à déterminer \mathbf{w} qui minimise $\|\mathbf{F} - \mathbf{w}^H \mathbf{F}_{\mathbf{b}}\|^2$. La solution fait intervenir encore une fois le pseudo-inverse de \mathbf{B} et on a $\mathbf{w} = \mathbf{B}^\dagger \mathbf{b}$. Le choix des colonnes de \mathbf{b} à prendre est précisé dans 5.4. On note l'extrême ressemblance avec le cas continu.

Dans le cas continu, on a montré que pour minimiser de l'erreur de reconstruction il faut considérer la distribution de la direction d'arrivée. Ici, la distribution est celle correspondant à la distribution discrète utilisée lors de la mesure des diagrammes. Si cette distribution n'est pas satisfaisante, il est toujours possible de rajouter des poids à chaque direction mesurée. Ces poids correspondent à une discrétisation de la loi continue que suit l'angle d'arrivée. À travers les simulations 6.3, on va montrer que la distribution uniforme est la plus performante car beaucoup plus adaptable à différents contextes (présence ou non de cluster par exemple) d'utilisation de la technique sans aucune modification des configurations de base et des coefficients de projection.

Pour obtenir une telle distribution de mesure, il suffit de mesurer la valeur des diagrammes de rayonnement à intervalle régulier, par exemple à chaque degré. Si cette condition est respectée, le calcul des coefficients est simplifié et devient : $\mathbf{w} = \mathbf{F}_{\mathbf{b}}^{H\dagger} \mathbf{F}^H$

4. $\mathbf{U}^H \mathbf{U} = \mathbf{U} \mathbf{U}^H = \mathbf{I}_G$

5.3.3 Réseau d'antennes

La figure 5.6 contient les valeurs singulières de la matrice \mathbf{F} . Cette matrice a été formée par discrétisation du diagramme de rayonnement obtenue dans l'annexe A. On a pris la valeur du diagramme pour 181 angles répartis uniformément entre 0° et 180° pour des déphaseurs quantifiés présentés dans 5.2.3 avec $K = 4$, c'est-à-dire seize configurations différentes .

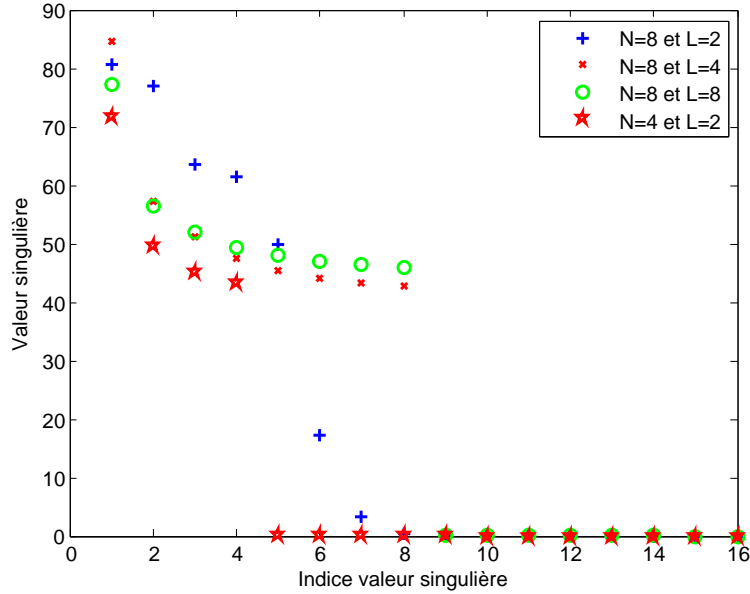


Figure 5.6 Valeur singulière pour différents réseaux ULA

Les valeurs singulières présentées dans la figure 5.6 ont été calculées pour différents types de réseaux. Il y a N valeurs singulières non nulles pour un réseau de N éléments. Lorsque $\Delta \geq 1/2$ les valeurs singulières sont relativement proches ce qui correspond au cas $N = 4$ et $L = 2$, $N = 8$ et $L = 4$, et $N = 8$ et $L = 8$. Ceci devient faux quand $\Delta < 1/2$ (cas $N = 8$ et $L = 2$). On peut directement relier la présence des maximums dans le domaine visible (domaine mesurable) avec la répartition des valeurs singulières. Dans le cas $N = 8$ et $L = 2$, il y avait cinq diagrammes de rayonnement avec un maximum de huit dans le domaine visible, un diagramme de maximum deux et deux autres de un. On retrouve bien cinq valeurs singulières prépondérantes dans 5.6. Par la suite on va ne considérer que des réseaux où $\Delta \leq 1/2$ car les cas $\Delta > 1/2$ semblent être assimilables à $\Delta = 1/2$ au regard de la décomposition SVD.

5.3.4 Antenne CRLH

De nouveau, on génère une matrice \mathbf{F} où cette fois les valeurs sont prises pour une antenne CRLH. Le calcul du diagramme de rayonnement d'une telle antenne est présenté dans l'annexe B. On a encore considéré 181 angles répartis uniformément entre 0° et 180° . Seize configurations ont été étudiées. Elles correspondent à seize fréquences différentes uniformément réparties entre $2,8 \text{ GHz}$ et $5,4 \text{ GHz}$. La figure 5.7 montre la manière dont se comporte le maximum du diagramme de rayonnement en fonction de la fréquence.

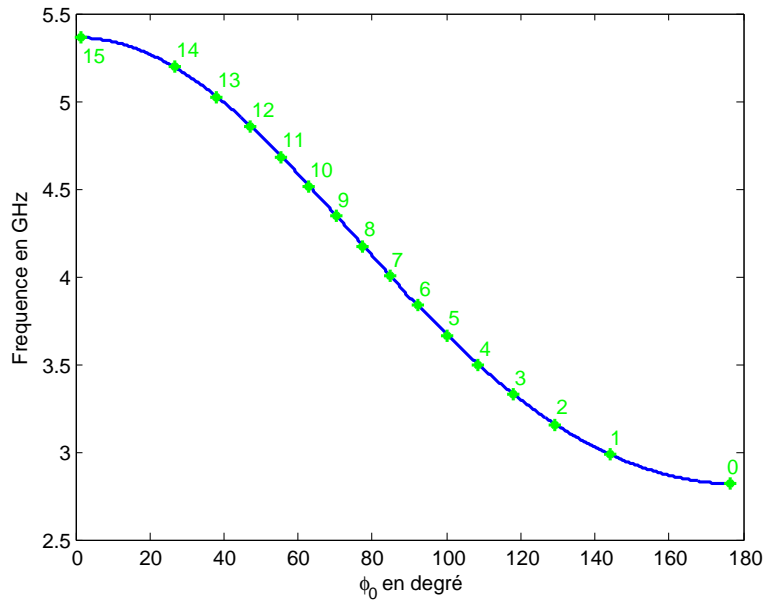


Figure 5.7 Présence de maximum pour une antenne CRLH

La répartition uniforme en fréquence ne correspond pas à une distribution uniforme de la direction pointée par l'antenne notamment sur les extrémités, c'est-à-dire 0° et 180° .

Les valeurs singulières de \mathbf{F} sont présentées dans la figure 5.8. L'échelle logarithmique est utilisée afin de représenter toutes les valeurs. Elles ont des valeurs extrêmement différentes allant de 10^2 à 10^{-8} . On voit donc qu'il est inutile de garder seize configurations de base. Il y a une sorte de rupture au niveau de la huitième valeur singulière qui se trouve aux alentours de 1. Pour la suite, on va étudier les dimensions variant de 1 à 10. Les simulations 6.7 montrent qu'une dimension de cinq est suffisante.

Remarque : *il est important de rappeler que les coefficients d'atténuation ne dépendent pas de la configuration de l'antenne qui est ici la fréquence.*

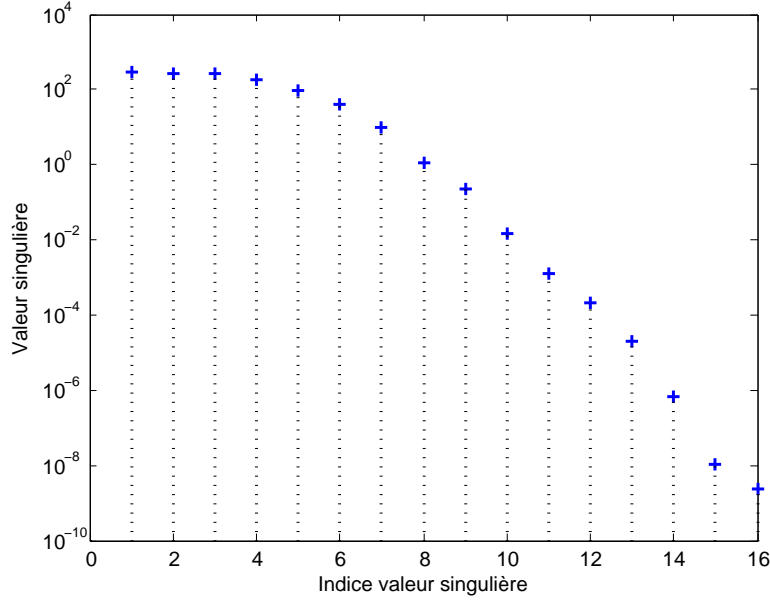


Figure 5.8 Valeur singulière pour une antenne CRLH

5.4 Critères de sélection des configurations de base

Pour une configuration donnée, on est capable de calculer les coefficients de projection optimaux. Le dernier point pour rendre possible la décomposition est de choisir la base. Le chapitre 4 nous a permis d'établir des liens entre les erreurs d'estimation et les erreurs de reconstruction avec le choix des configurations. On a ainsi vu que l'erreur d'estimation dépend de la norme des coefficients de projection et ces derniers conditionnent aussi l'erreur de reconstruction. Cette partie instaure les critères utilisés dans la sélection de la base pour la minimisation de ces erreurs.

5.4.1 Minimisation de l'erreur de reconstruction de la matrice de canal

Intéressons nous tout d'abord au cas d'absence d'erreur d'estimation. Comme on l'a montré dans 4.3.1, la minimisation de l'erreur de reconstruction de la matrice de canal est similaire à la minimisation de l'erreur de décomposition du diagramme de rayonnement.

$$\arg \min_{\mathbf{W}(\Omega)} \mathbb{E}_{\alpha, \Theta} \left\{ \left\| \mathbf{H}(\Omega) - \mathbf{W}(\Omega)^H \mathbf{H}_b \right\|_F^2 \right\} = \bigcup_{r=1}^R \arg \min_{\mathbf{w}_r(\Omega^r)} \mathbb{E}_{\Theta} \left\{ \left\| f_r(\Theta, \Omega^r) - \mathbf{w}_r(\Omega^r)^H \mathbf{f}_{br}(\Theta) \right\|^2 \right\} \quad (5.35)$$

La minimisation de l'erreur de reconstruction au niveau de chaque antenne est la clé de la minimisation de l'erreur de reconstruction de la matrice de canal. Le critère de sélection des configurations de base est choisi à partir de ce constat. Pour chaque antenne, on va essayer de trouver les configurations qui minimisent :

$$\mathbb{E}_{\Omega^r} \left\{ \frac{\mathbb{E}_{\Theta} \left\{ \left| f_r(\Theta, \Omega^r) - \mathbf{w}_r(\Omega^r)^H \mathbf{f}_{\mathbf{b}_r}(\Theta) \right|^2 \right\}}{\mathbb{E}_{\Theta} \left\{ |f_r(\Theta, \Omega^r)|^2 \right\}} \right\} \quad (5.36)$$

où \mathbb{E}_{Ω^r} représente la moyenne sur l'ensemble des configurations possibles du récepteur r .

Ce critère est construit pour minimiser l'erreur relative moyenne de décomposition. Bien d'autres critères auraient pu être pris : minimisation de l'erreur moyenne de la décomposition (et non relative)

$$\min_{\Omega^r} \mathbb{E}_{\Theta} \left\{ \left| f_r(\Theta, \Omega^r) - \mathbf{w}_r(\Omega^r)^H \mathbf{f}_{\mathbf{b}_r}(\Theta) \right|^2 \right\}$$

ou minimisation de la plus grande erreur de décomposition

$$\min_{\Omega^r} \max_{\Theta} \mathbb{E} \left\{ \left| f_r(\Theta, \Omega^r) - \mathbf{w}_r(\Omega^r)^H \mathbf{f}_{\mathbf{b}_r}(\Theta) \right|^2 \right\}$$

La plupart de ces critères donnent des configurations de base assez similaires pour les antennes considérées. Sans doute une prochaine étude pourrait apporter une réponse beaucoup plus précise sur le choix du critère.

La détermination de ces configurations se fait pour une dimension de base N' connue et peut être assez longues. En effet, toutes les combinaisons de configurations doivent être testées (de l'ordre de $G^{N'}$). Ceci n'est pas réellement un problème car toute cette partie de minimisation est faite avant l'utilisation de l'antenne et la transmission de données. Le choix de la dimension peut par exemple être basé sur la décomposition SVD qui permet de donner un ordre de grandeur.

Calcul du critère de minimisation pour une antenne à variables séparables

Pour chaque récepteur, on cherche à minimiser l'erreur (5.36) qui devient pour une antenne avec des variables séparables (5.13) et (5.27) :

$$\mathbb{E}_{\Omega} \left\{ \frac{\mathbf{b}(\Omega)^H [\mathbf{I}_N - \mathbf{B}^{\dagger H} \mathbf{B}^H] \mathbf{R}_a [\mathbf{I}_N - \mathbf{B} \mathbf{B}^{\dagger}] \mathbf{b}(\Omega)}{\mathbf{b}(\Omega)^H \mathbf{R}_a \mathbf{b}(\Omega)} \right\} \quad (5.37)$$

Pour une certaine dimension de base N' on cherche les configurations de base $\Omega_1, \dots, \Omega_{N'}$

qui minimisent cette équation. Comme on l'a vu précédemment, si $N' \geq N$ n'importe quelle configuration de base est utilisable du moment que le rang de \mathbf{B} soit N car aucune erreur de reconstruction n'existe. Cette équation a surtout de l'intérêt pour une réduction de la base c'est-à-dire $N \geq N'$.

Il est possible de calculer \mathbf{R}_a pour un réseau ULA quelconque si la direction d'arrivée suit une loi uniforme. L'élément de la ligne p et de la colonne q de \mathbf{R}_a a pour valeur :

$$R_{pq} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{j2\pi\Delta(p-q)\cos\phi} d\phi \quad (5.38)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-j2\pi\Delta(p-q)\sin\phi} d\phi \quad (5.39)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(2\pi\Delta(p-q)\sin\phi) d\phi - j \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(2\pi\Delta(p-q)\sin\phi) d\phi \quad (5.40)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(2\pi\Delta(p-q)\sin\phi) d\phi - 0 \quad (5.41)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(2\pi\Delta(p-q)\sin\phi) d\phi + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^0 \cos(2\pi\Delta(p-q)\sin\phi) d\phi \quad (5.42)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(2\pi\Delta(p-q)\sin\phi) d\phi + \frac{1}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \cos(2\pi\Delta(p-q)\sin\phi) d\phi \quad (5.43)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(2\pi\Delta(p-q)\sin\phi) d\phi \quad (5.44)$$

$$= J_0(2\pi\Delta(p-q)) \quad (5.45)$$

où $J_0(\cdot)$ est la fonction de Bessel d'ordre 0.

Si un calcul de \mathbf{R}_a pour une loi de Laplace est nécessaire, une forme approximative peut être faite à partir de l'article [32].

Calcul du critère de minimisation suite à une décomposition SVD

L'utilisation de la décomposition SVD compacte nous a menés à exprimer le diagramme de rayonnement sous la forme 5.34. Une discrétisation de l'équation précédente revient à

minimiser :

$$\frac{1}{G} \sum_{g=1}^G \frac{\mathbf{b}_g^H [\mathbf{I}_N - \mathbf{B}^{\dagger H} \mathbf{B}^H] \mathbf{R}_a [\mathbf{I}_N - \mathbf{B} \mathbf{B}^{\dagger}] \mathbf{b}_g}{\mathbf{b}_g^H \mathbf{R}_a \mathbf{b}_g} \quad (5.46)$$

où $\mathbf{R}_a = \frac{1}{A} \mathbf{a} \mathbf{a}^H$ et \mathbf{b}_g correspond à la g -ième colonne de \mathbf{b} .

Configurations pour les antennes étudiées par minimisation de l'erreur de reconstruction

Les tableaux 5.1 et 5.2 contiennent les indices des configurations de base pour des réseaux ULA de longueur $L = 2$, le premier pour $N = 4$ et le second $N = 8$. Seuls les cas où il y a des erreurs de configurations ont été étudiés ici, c'est-à-dire , $N \geq N'$. Les coefficients de configurations ont été calculés à partir de 5.23 et non 5.20 car ces derniers offrent des performances médiocres comme le montrent les simulations 6.3.

Tableau 5.1 Configurations de base pour un réseau ULA $N = 4$ et $L = 2$ par minimisation de l'erreur de reconstruction

Dimension	Indices
1	8
2	8 15
3	2 8 14

Tableau 5.2 Configurations de base pour un réseau ULA $N = 8$ et $L = 2$ par minimisation de l'erreur de reconstruction

Dimension	Indices configurations de base
1	3
2	4 12
3	4 13 14
4	2 3 12 14
5	0 2 3 13 14
6	1 2 4 12 14 15
7	0 1 3 4 12 13 15

Le tableau 5.3 est généré pour des dimensions variant de 1 à 10 pour l'antenne CRLH de l'annexe B. Théoriquement, on devrait le faire pour des dimensions allant jusqu'à 15 qui sont tous les cas présentant des erreurs de reconstruction (la décomposition SVD montre que cette antenne possède 16 valeurs singulières non nulles). On ne le fait pas ici car les simulations dans 6.7 montrent que pour des dimensions déjà en dessous de 10 l'erreur de reconstruction ne se fait plus ressentir.

Ces configurations sont utilisées pour comparer l'importance des erreurs dans 4.4.

Tableau 5.3 Configurations de base pour une antenne CRLH par minimisation de l'erreur de reconstruction

Dimension	Indices configurations de base									
1	12									
2	8	12								
3	4	8	13							
4	1	4	8	13						
5	1	3	6	10	14					
6	1	3	5	8	11	14				
7	0	2	5	7	10	12	15			
8	0	2	4	6	9	11	13	15		
9	0	2	4	6	7	10	12	14	15	
10	0	1	3	5	7	9	11	13	14	15
⋮	⋮									

5.4.2 Minimisation de l'erreur d'estimation

Considérons maintenant le cas où l'on souhaite minimiser l'erreur d'estimation. On a vu dans 4.2 que cette erreur est reliée au rapport signal à bruit, au nombre de transmetteurs, au nombre de mesures de canal et à la matrice des coefficients de projection.

Minimisation de la norme des coefficients de projection

La norme de la matrice de covariance de l'erreur d'estimation du canal 4.31 est proportionnelle à $\|\mathbf{W}(\Omega)\|_F^2$. Un critère simple est alors de trouver les configurations de base qui minimisent

$$\mathbb{E}_{\Omega} \{ \|\mathbf{W}(\Omega)\|_F^2 \}$$

Par construction de la matrice des coefficients de projection (3.11), la minimisation peut se faire au niveau de chaque antenne :

$$\mathbb{E}_{\Omega^r} \{ \|\mathbf{w}_r(\Omega^r)\|_2^2 \}$$

Les coefficients de projection sont calculés par la méthode simple (5.23) pour la même raison que précédemment (meilleurs résultats que (5.20)). Encore une fois d'autres critères comme le min max auraient pu être choisis.

La norme des coefficients de projection intervient aussi dans le calcul de l'estimation de la norme de la matrice de canal déterminée dans (4.33). Il est important de voir que lorsque $\|\mathbf{w}_r(\Omega^r)\|_2^2$ est constant par rapport à Ω^r une partie de l'estimateur de la norme du canal n'est plus nécessaire. De plus, la connaissance du SNR n'est plus requise au récepteur. En

effet, on souhaite maximiser $\tilde{\rho}_r(\Omega^r)$. Si une partie de cette fonction de Ω^r est constante elle est inutile à la maximisation. On ne veut pas connaître la valeur maximale de la norme mais uniquement la configuration qui la maximise. On note aussi que la variance de l'erreur est alors fixe quelque soit la configuration estimée.

Pour un réseau ULA, lorsque $N' = N$, on a l'inégalité suivante :

$$\frac{\|\mathbf{b}(\Omega)\|_2^2}{\max |\lambda_{\mathbf{B}}|^2} \leq \|\mathbf{w}(\Omega)\|_2^2 \leq \frac{\|\mathbf{b}(\Omega)\|_2^2}{\min |\lambda_{\mathbf{B}}|^2} \quad (5.47)$$

où les $\lambda_{\mathbf{B}}$ sont les valeurs singulières de la matrice \mathbf{B} . La matrice \mathbf{B} dépend directement du choix des configurations de base. Plus généralement cette inégalité est vraie dès que \mathbf{B} est normale⁵. Si on arrive à former une matrice \mathbf{B} unitaire, les valeurs singulières maximales et minimales sont égales. La norme des coefficients de projection est alors uniquement fonction du vecteur $\mathbf{b}(\Omega)$ sur lequel on n'a pas d'influence. En reprenant les configurations des diagrammes ULA proposées à 5.2.3, on obtient $\|\mathbf{w}_r(\Omega^r)\|_2^2 = \frac{N}{N'}$ pour $N' \geq N$. La condition de norme constante est donc possible.

Il est possible de trouver une expression littérale de la norme des coefficients pour un réseau ULA de deux éléments. Pour deux configurations de base Ω_1 et Ω_2 , on a la norme des coefficients de projection pour cette antenne qui s'exprime :

$$\|\mathbf{w}(\Omega)\|_2^2 = \frac{\sin^2[\pi\Delta(\Omega_2 - \Omega)] + \sin^2[\pi\Delta(\Omega_1 - \Omega)]}{\sin^2[\pi\Delta(\Omega_2 - \Omega_1)]} \quad (5.48)$$

Cette fonction n'est pas définie (elle tend vers l'infini) lorsque $\Omega_1 - \Omega_2 \equiv 0 \left[\frac{1}{\Delta}\right]$. Ceci correspond à la condition d'inversibilité de la matrice \mathbf{B} en 5.2.3. Elle est constante et vaut un quelque soit la configuration lorsque $\Omega_1 - \Omega_2 \equiv \frac{1}{L} \left[\frac{1}{\Delta}\right]$. Cette condition impose l'orthogonalité entre les colonnes de \mathbf{B} en 5.2.3. Si le nombre d'éléments du réseau augmente, il devient assez difficile d'écrire cette norme de manière littérale. On peut cependant généraliser les remarques faites avant. Pour un réseau de N antennes avec N configurations de base, la variance est infiniment grande si $\Omega_p - \Omega_q \equiv 0 \left[\frac{1}{\Delta}\right]$ pour $p \neq q$. Elle est constante et vaut n si $\Omega_p - \Omega_q \equiv \frac{p}{L} \left[\frac{1}{\Delta}\right]$ pour $p \neq 0$.

Les tableaux 5.4 et 5.5 contiennent les indices pour différents réseaux ULA. Pour en même temps minimiser l'erreur de reconstruction, on a uniquement considéré les configurations où le rang de \mathbf{B} est $\min(N', N)$. Sans cette condition, les configurations trouvées pour $N' < N$ n'ont pas de sens : performances exécrables à cause d'erreurs de reconstruction importantes. Cette condition pour $N' \geq N$ supprime toute erreur de reconstruction.

Le tableau 5.6 est déterminé pour l'antenne CRLH de l'annexe B.

5. $\mathbf{B}\mathbf{B}^H = \mathbf{B}^H\mathbf{B}$

Tableau 5.4 Configurations de base pour un réseau ULA $N = 4$ et $L = 2$ par minimisation de l'erreur d'estimation

Dimension	Indices configurations de base												
1	11												
2	0	12											
3	0	4	12										
4	0	4	8	12									
5	0	3	6	10	13								
6	0	2	5	8	10	13							
7	1	3	6	8	10	12	15						
8	1	1	5	5	9	9	13	13					
9	0	0	3	4	6	8	9	12	13				
10	0	0	3	3	6	7	10	10	13	13			
11	0	0	3	3	6	6	8	10	10	13	13		
12	0	0	3	4	4	7	8	8	11	12	12	15	
13	1	1	4	4	5	8	8	8	11	12	12	15	15
\vdots							\vdots						

Tableau 5.5 Configurations de base pour un réseau ULA $N = 8$ et $L = 2$ par minimisation de l'erreur d'estimation

Dimension	Indices configurations de base												
1	14												
2	2	14											
3	0	8	14										
4	2	4	10	14									
5	0	2	4	8	14								
6	0	2	4	10	12	14							
7	0	2	4	8	10	12	14						
8	0	2	4	6	8	10	12	14					
9	0	2	4	6	8	10	12	12	14				
10	0	1	3	4	5	7	9	11	13	15			
11	0	1	2	3	5	7	9	11	13	14	15		
12	1	3	4	5	6	7	8	9	10	11	13	15	
13	0	1	2	3	4	5	6	8	10	11	12	14	15
\vdots							\vdots						

Tableau 5.6 Configurations de base pour une antenne CRLH par minimisation de l'erreur d'estimation

Dimension	Indices configurations de base									
1	2									
2	2 15									
3	2 4 15									
4	1 3 6 15									
5	2 4 7 11 15									
6	1 3 6 9 12 15									
7	1 3 5 8 11 13 15									
8	0 2 4 6 8 11 13 15									
9	0 1 3 5 7 10 12 14 15									
10	0 1 3 5 7 9 11 13 14 15									
⋮	⋮									

Répétition des configurations de base

Comme on peut le voir certaines configurations de base se répètent. Le cas flagrant est celui présenté dans le tableau 5.1 pour des dimensions supérieures à quatre. Une technique présentée ici permet d'éviter de calculer inutilement des coefficients de projection. On considère que l'on connaît déjà les coefficients de projection $w_1(\Omega), \dots, w_N(\Omega)$ pour N configurations de base $\Omega_1, \dots, \Omega_N$. Imaginons que l'on veuille à la place avoir N' configurations de base avec $N' = \sum_{n=1}^N m_n$ où m_n est le nombre de fois que la configuration Ω_n est répétée. Les nouveaux coefficients rattachés à chaque configuration Ω_n sont $\frac{1}{m_n}w_n(\Omega)$ dans la base de dimension N' . Pour le prouver il suffit de calculer la reconstruction du diagramme de rayonnement dans cette nouvelle base avec ces coefficients de projection. En regroupant les configurations de base on a :

$$\sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{m_n} \frac{1}{m_n} w_n(\Omega) f(\Theta, \Omega_n) = \sum_{n=1}^N w_n(\Omega) f(\Theta, \Omega_n) \quad (5.49)$$

$$= f(\Theta, \Omega) \quad (5.50)$$

Conclusions du chapitre 5

La minimisation de l'erreur de reconstruction pour une base donnée nous a menés à une équation permettant de déterminer les coefficients de projection. On a ainsi pu voir que cette décomposition est fortement liée à notre capacité à séparer les variables de directions et de configurations. Deux cas ont été distingués : le cas où cette séparation existe déjà dans le calcul

des diagrammes de rayonnement (antennes ULA) et le cas où cette séparation n'est pas visible (antennes CRLH). Selon la dimension de la base on a montré qu'il était possible d'annuler l'erreur de décomposition. Pour une antenne ULA, cette dimension minimale correspond au nombre d'éléments composant le réseau. Cette dimension est apparue aussi dans la méthode utilisant la décomposition SVD. Cette technique de décomposition s'est d'ailleurs avérée très intéressante pour donner un ordre de grandeur de la dimension de la base pour une antenne CRLH.

Après la présentation de méthode de calcul des coefficients de projection, on a indiqué qu'il fallait différentes manières de choisir les configurations de base. Le choix ces configurations suit des critères de sélection construits à partir de la minimisation de l'erreur de reconstruction et de l'erreur d'estimation.

On possède désormais pour chaque dimension des ensembles de configurations de base et de coefficients de projection. Il reste à déterminer lesquels donnent les meilleures performances.

CHAPITRE 6

SIMULATIONS

Ce chapitre regroupe l'ensemble des simulations. Les paramètres utilisés durant les simulations sont résumés dans 6.1 et 6.2. On va faire le point dans 6.3 sur la méthode de calcul des coefficients de projection qu'il faut choisir (5.20) ou (5.23) et aussi la distribution qui doit être considérée pour la minimisation des erreurs de reconstruction (5.1). L'influence des erreurs de reconstruction sur la capacité est étudiée dans 6.4. Lorsque l'on commence à prendre en compte les erreurs d'estimation dans 6.5, on y introduit une capacité corrigée permettant de considérer le temps perdu dans l'estimation des canaux. C'est grâce à cette capacité que l'on va pouvoir comparer notre technique avec celle mesurant le canal pour toutes les configurations. Dans 6.6 et 6.7, on réussit à déterminer la dimension optimale de la base ainsi que le nombre d'estimations nécessaire pour des systèmes et des antennes spécifiques. Toutes les simulations faites jusque là auront pour but de maximiser la norme de la matrice de canal. La maximisation du déterminant est traitée dans 6.8. Au final, on montre qu'il est possible d'améliorer la capacité avec notre technique de sélection de configuration.

6.1 Paramètres des simulations

Les simulations se passent de la manière suivante. Pour une réalisation particulière de canal, on est capable de trouver deux configurations : l'une optimale Ω_{max} issue d'une connaissance parfaite du canal pour toute configuration et l'autre $\tilde{\Omega}_{max}$ issue de la reconstruction et de l'estimation du canal. Dans certains cas on ne fait pas d'estimation des canaux de base, on étudie seulement l'erreur de reconstruction 6.3 et 6.4. $\tilde{\Omega}_{max}$ dépend de la dimension de la base, du nombre de mesures pour l'estimation et du SNR. Ω_{max} ne dépend que du SNR. Ces configurations sont déterminées afin de maximiser la norme de la matrice de canal ou du déterminant de la formule de la capacité. Une fois ces configurations connues, on calcule la capacité instantanée pour cette réalisation avec les véritables valeurs du canal (et non sa valeur estimée). En moyennant les résultats sur toutes les valeurs, on obtient d'un côté $C(\text{SNR})$ de Ω_{max} et $C(\text{SNR}, N, D)$ de $\tilde{\Omega}_{max}$. $C(\text{SNR}, N, D)$ est donc une borne supérieure de la véritable capacité. Elle est calculée à partir de $\mathbf{H}(\tilde{\Omega}_{max})$ et non $\tilde{\mathbf{H}}(\tilde{\Omega}_{max})$. En effet, l'estimateur du canal a été conçu initialement pour trouver la configuration optimale et pas pour être utilisé lors du décodage par exemple. $C(\text{SNR})$ représente la capacité maximale atteignable et elle est aussi prise comme borne supérieure de la capacité issue de l'estimation

de tous les canaux.

Principalement deux éléments sont représentés dans les figures : l'erreur de capacité $C(\text{SNR}) - C(\text{SNR}, N, D)$ qui permet de voir la perte causée par l'utilisation de notre technique et l'erreur relative de la capacité $\frac{C(\text{SNR}) - C(\text{SNR}, N, D)}{C(\text{SNR})}$ qui est plus en relation avec la capacité de la technique proposée à bien reconfigurer l'antenne. La capacité moyenne est calculée à partir de 10^6 simulations ce qui correspond à un intervalle de confiance à 99%, c'est-à-dire environ une précision de 5.10^{-3} bps/Hz pour la capacité et de 5.10^{-7} pour l'erreur relative.

Comme on l'a précisé auparavant, les antennes reconfigurables (réseau ULA ou antenne CRLH) se trouvent en réception. Les antennes émettrices sont des antennes omnidirectionnelles. Les réseaux d'antennes sont testés dans un système 2×2 avec deux récepteurs identiques, réseau à $N = 4$ ou $N = 8$ éléments de longueur $L = 2$. La séparation des antennes de réception et d'émission est la même $\Delta_R = \Delta_T = L$. L'antenne CRLH est testée uniquement dans un système SISO. Les caractéristiques de cette antenne se trouvent dans l'annexe B. Les signaux arrivent selon $M = 5$ chemins différents. Lorsque ce n'est pas précisé les angles de départ et d'arrivée sont indépendants et suivent une distribution uniforme. Les coefficients d'atténuation sont i.i.d. et suivent une loi de la forme $\mathcal{CN}(0, 1)$. Ils sont aussi indépendants des directions.

6.2 Nombre de configurations

Dans cette section, il n'est pas encore question de tester la technique présentée mais seulement d'étudier l'effet sur la capacité du nombre de configurations disponibles. Le nombre de configurations est de la forme $G = 2^K$ avec les déphaseurs quantifiés considérés. Pour le nombre de chemins choisi ($M = 5$), on va voir que $K = 4$ c'est-à-dire seize configurations pour les réseaux étudiés est un compromis acceptable. Pour comprendre pourquoi cette valeur dépend de K , il faut s'imaginer que si le signal arrive selon une unique direction, le meilleur signal reçu est obtenu lorsque le maximum du diagramme de rayonnement pointe dans cette direction. Or le nombre de directions dans laquelle est capable de pointer l'antenne dépend directement du nombre de configurations.

On teste comme valeur de K trois, quatre et cinq pour des réseaux ULA de quatre et huit antennes¹ de longueur $L = 2$. Ces réseaux sont placés en réception d'un système MIMO 2×2 . Pour chaque réalisation de canal, on suppose connaître parfaitement la valeur de la matrice de canal pour toutes les configurations. On choisit le meilleur réglage d'antenne.

Les résultats sont présentés dans la figure 6.1. De manière générale, le réseau de huit

1. Au passage on remarque bien que N est une puissance de deux et cette puissance est inférieure ou égale à K .

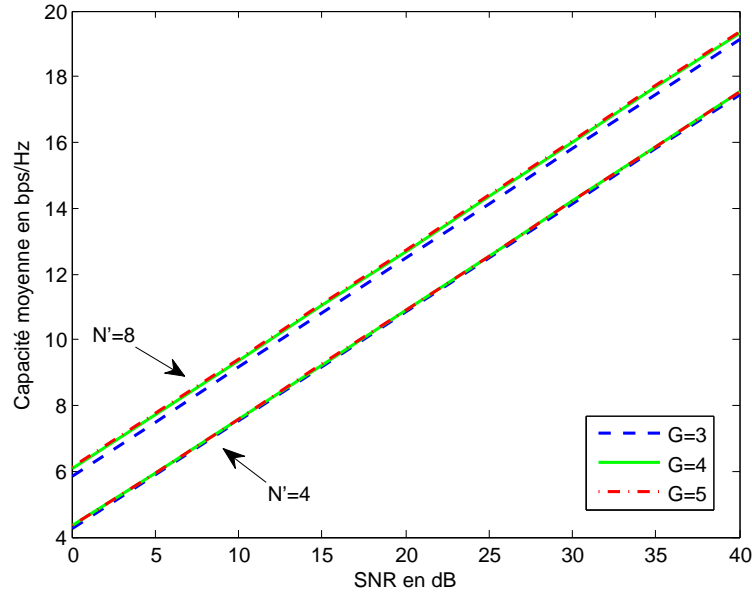


Figure 6.1 Influence du nombre de configurations sur la capacité pour différents réseaux de longueur $L = 2$

antennes a une meilleure capacité. Ceci vient du gain plus important du réseau : le maximum du diagramme de rayonnement d'un réseau à huit antennes est de huit et est seulement de quatre pour un réseau de quatre antennes, ce qui revient à doubler la valeur du canal. Or à haut SNR ou lorsque que le gain du canal est assez important, $\frac{\text{SNR}}{T} \rho(\Omega) \gg 1$, on a la capacité qui peut s'écrire de la manière suivante :

$$\log_2 \left[1 + \frac{\text{SNR}}{T} \rho(\Omega) \right] \simeq \log_2 \left[\frac{\text{SNR}}{T} \right] + \log_2 [\rho(\Omega)] \quad (6.1)$$

$$\simeq \log_2 \left[\frac{\text{SNR}}{T} \right] + 2 \log_2 [\|\mathbf{H}(\Omega)\|_F] \quad (6.2)$$

Si la norme du canal double, on a donc une augmentation d'environ 2 bps/Hz . Cette différence se retrouve bien sur la courbe.

Pour en revenir au nombre de configurations, si K augmente, la capacité augmente certes mais pas de manière drastique. Par exemple, entre $K = 5$ et $K = 3$ pour le réseau de huit antennes, on a seulement gagné $0,27 \text{ bps/Hz}$. Ce gain est quasi inexistant pour le réseau de quatre antennes ($0,07 \text{ bps/Hz}$). On choisit $K = 4$ c'est-à-dire $G = 16$ configurations : avoir G trop bas rend l'intérêt d'une décomposition assez faible ($N \rightarrow G$) et avoir G trop grand augmente les besoins en puissance de calcul sans pour autant améliorer la capacité.

6.3 Influence de la méthode de calcul des coefficients de projection dans différents contextes de distribution d'arrivée

6.3.1 Choix du type de calcul et de la distribution

Maintenant que le choix du nombre de configuration a été fait il reste à choisir la méthode permettant de calculer les coefficients de projection. En effet, on a établi deux formes permettant de minimiser l'erreur de reconstruction. L'une est assez simple (5.23) et consiste à inverser (ou prendre son pseudo-inverse) la matrice \mathbf{B} , l'autre est plus complexe (5.20) et prend en compte la matrice de corrélation des signaux d'arrivée \mathbf{R}_a . On va ici étudier le cas du réseau à huit antennes dans lequel on prend uniquement cinq pour dimension de base comme proposé par la décomposition SVD dans 5.3.3. En plus de savoir quelle est la meilleure méthode de calcul, on souhaite déterminer les conséquences lorsqu'on utilise des configurations de base et des coefficients de projection choisis pour une certaine distribution alors que celle-ci ne correspond pas à la réelle distribution dans laquelle est utilisée l'antenne : par exemple, utiliser une loi uniforme alors que tous les signaux proviennent majoritairement d'une certaine direction.

On compare ici trois paires de coefficients de projection. Chaque paire est composée des deux techniques de calcul, simple (5.23) et complexe (5.20). La première paire est calculée pour minimiser l'erreur de reconstruction pour une distribution uniforme, la deuxième pour un cas de cluster de position moyenne 70° et d'écart type 10° et la troisième pour un autre cluster positionné cette fois en moyenne à 100° et d'écart type 10° . Les performances de ces coefficients de projection sont simulées pour les trois types de distribution d'angle ayant permis de les établir.

Pour un cluster, la loi de distribution prise pour la direction d'arrivée est une distribution de Laplace caractérisée par sa moyenne ϕ_0 et son écart type σ_ϕ . Cette distribution est assez souvent utilisée dans la littérature pour modéliser des clusters comme par exemple dans [32].

Dans le tableau 6.1 on retrouve les indices des cinq configurations de base dans les trois contextes de distributions pour les deux types de calcul. Les indices ont été calculés pour minimiser l'erreur de reconstruction. Lorsqu'il y a un cluster sans grande surprise les configurations de base choisies correspondent à des diagrammes de rayonnement pointant dans la direction moyenne du cluster. Pour s'en convaincre il suffit de regarder la correspondance dans la figure 5.5 entre les indices et la direction maximisée.

Les figures 6.2, 6.3 et 6.4 représentent l'erreur relative qui est faite sur la capacité. La figure 6.2 représente les simulations lorsque les directions d'arrivée suivent une loi uniforme. Les six courbes (certaines sont superposées, elles sont plus visibles dans les figures suivantes) sont les six cas présentés dans le tableau (trois distributions différentes fois deux types de

Tableau 6.1 Configuration de base pour les trois distributions de direction d'arrivée

Distribution	Type de calcul	Indices					
Uniforme	Simple	0	2	3	13	14	
	Complexe	5	7	8	9	11	
Cluster 70°	Simple	0	1	2	3	15	
	Complexe						
Cluster 100°	Simple	0	1	13	14	15	
	Complexe						

calcul pour les coefficients de projection). La figure 6.3 est faite lorsque la distribution réelle d'arrivée des signaux suit une loi de Laplace de moyenne 70° et d'écart type 10°. La figure 6.4 est quant à elle générée avec une loi de Laplace de moyenne 100° et d'écart type 10°.

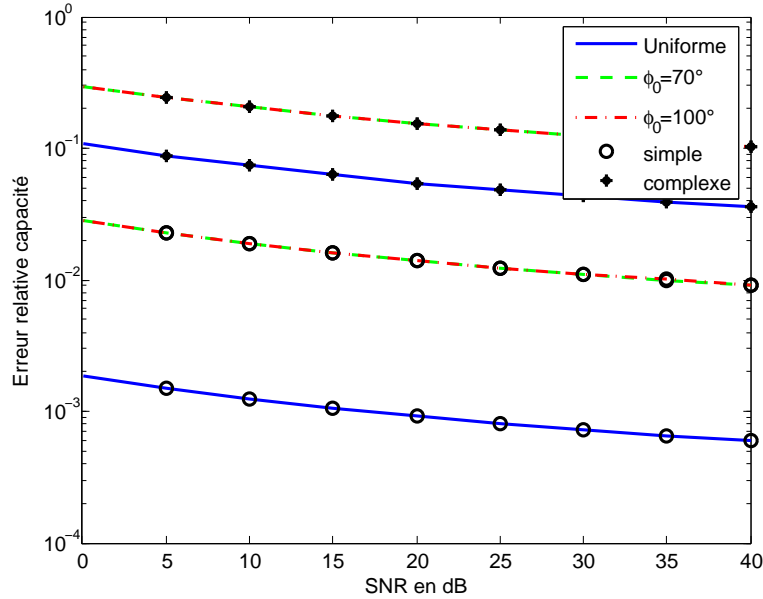


Figure 6.2 Erreur relative de la capacité pour une distribution uniforme de la direction d'arrivée

De manière évidente, les configurations et les coefficients de projection choisis à partir de la méthode complexe (5.20) offrent des performances bien meilleures que celles permises par la méthode de calcul simple quelque soit la distribution utilisée. L'explication de ce phénomène a été en partie donnée lorsqu'on a fait la remarque que le calcul complexe des coefficients de projection faisait intervenir plusieurs fois la matrice pseudo-inverse. Une matrice pseudo-inverse utilisée dans un problème de minimisation comme le nôtre contient des

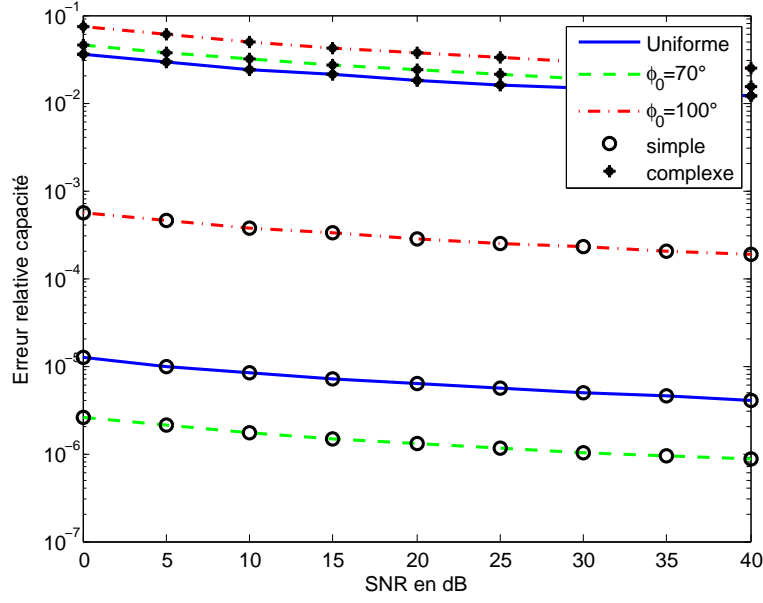


Figure 6.3 Erreur relative de la capacité avec un cluster de position moyenne $\phi_0 = 70^\circ$

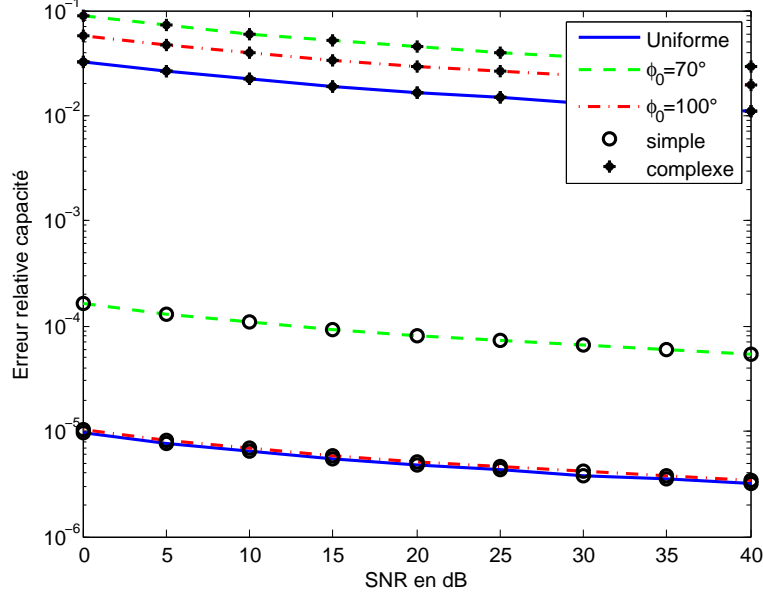


Figure 6.4 Erreur relative de la capacité avec un cluster de position moyenne $\phi_0 = 100^\circ$

erreurs inhérentes aux problèmes de minimisation. Réutiliser plusieurs fois dans un calcul une matrice engendrant des erreurs mène a priori à encore plus d'erreurs.

Le fait d'avoir des coefficients en accord avec la véritable distribution ne garantit pas la meilleure reconfiguration comme pour le cas du cluster à 100° de la figure 6.4. De plus, on constate aussi que dès que les coefficients issus des cluster sont utilisés dans un contexte qui ne leur est pas propre, les performances en sont diminuées alors que celles issues de loi uniforme sont toujours moyennes voire meilleures. Dans un cas où la distribution réelle est inconnue, on peut donc dire que la distribution uniforme avec un calcul simple est un bon choix intermédiaire.

Ce choix de distribution peut s'expliquer par la manière dont l'erreur de décomposition se répartit. Grossièrement, on peut s'imaginer que l'erreur de décomposition se répartit inversement à la loi avec laquelle on la calcule : pour une loi uniforme, l'erreur se répartit uniformément dans le domaine angulaire alors que pour une loi de Laplace cette erreur augmente lorsque l'on s'éloigne du cluster². Ainsi avec une loi de Laplace, on peut trouver une exagération fortuite de la puissance reçue dans des directions éloignées de la position angulaire moyenne du cluster à cause de l'erreur de décomposition. On peut ainsi être mené à choisir une mauvaise configuration. Or, lorsque le calcul de capacité est fait, on prend le gain réel du diagramme de rayonnement et non de celui qui est reconstruit. Il y a ainsi une forte différence entre la capacité qui était espérée et la capacité réelle pour cette configuration soi-disant optimale. Une répartition uniforme de l'erreur de reconstruction contre en partie l'exagération du gain du diagramme de rayonnement quelque soit la réelle distribution de la direction d'arrivée.

6.3.2 Effet de la dispersion de la direction d'arrivée

On souhaite désormais connaître l'effet de la dispersion du cluster sur le choix de la configuration optimale. On simule une nouvelle fois un cluster mais pour deux écarts types différents. Le cluster est en position 70° mais l'un a pour écart type 10° et l'autre 20° . Les configurations sont une nouvelle fois calculées pour minimiser l'erreur de reconstruction selon une loi uniforme. Les coefficients de projection sont déterminés avec le calcul simple. La figure 6.5 représente l'erreur relative faite sur la capacité. On a rajouté les résultats obtenus par les coefficients issus du cluster d'écart type 10° pour une distribution réelle suivant cette loi et ceux issus de l'écart type 20° avec un distribution ayant cet écart type. Les simulations montrent une nouvelle fois que la loi uniforme semble être le choix de distribution le

2. Lorsque l'on calcule l'erreur angulaire moyenne, on pondère chaque erreur angulaire par la distribution d'arrivée du signal. Avec une loi de Laplace, les fortes erreurs éloignées du cluster deviennent donc insignifiantes à cause de la faible valeur de la probabilité qu'un signal arrive dans ces directions.

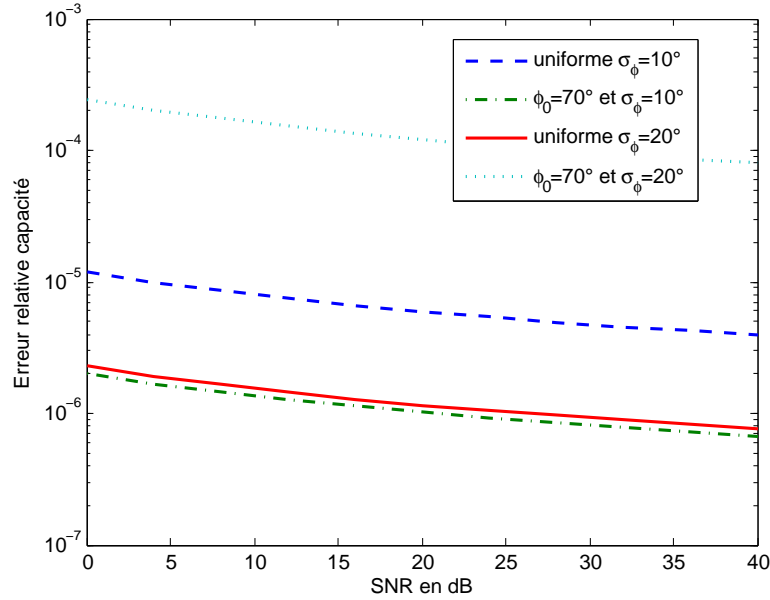


Figure 6.5 Influence de la taille du cluster

plus sensé pour déterminer les configurations minimisant l'erreur de reconstruction. En effet, cette distribution est peut-être moins efficace pour une utilisation avec un cluster faiblement dispersé mais elle est meilleure pour des clusters plus grands. Ceci est tout à fait normal : les signaux proviennent majoritairement d'une même direction avec un cluster. Selon son écart type, plus ou moins de chemins se trouvent dans le lobe principal du diagramme de rayonnement. Lorsque que la direction d'arrivée suit une loi uniforme ou loi de Laplace avec un fort écart type, la probabilité que le nombre de chemin arrivant dans le lobe principal est plus faible que lorsqu'il y a un cluster concentré. Le choix de la configuration récupérant le plus de signal est alors plus dur à faire si les signaux sont trop dispersés.

6.4 Impact de la dimension de la base sur l'erreur de reconstruction

Comme on l'a vu dans le chapitre 5, la dimension de la base conditionne l'erreur de décomposition et donc l'erreur de reconstruction. Dans cette section est étudié l'effet de la dimension sur la valeur moyenne de la capacité sans prendre en compte l'erreur d'estimation. On teste les performances de configuration de notre technique pour un réseau ULA de quatre éléments avec une dimension variant de un à trois. Les dimensions supérieures ne sont pas de grande utilité car, l'en absence d'estimation et d'erreur de reconstruction, on est sûr de toujours faire le bon choix. On compare aussi les performances des configurations minimi-

sant l'erreur de reconstruction du tableau 5.1 et celles minimisant l'erreur d'estimation du tableau 5.4.

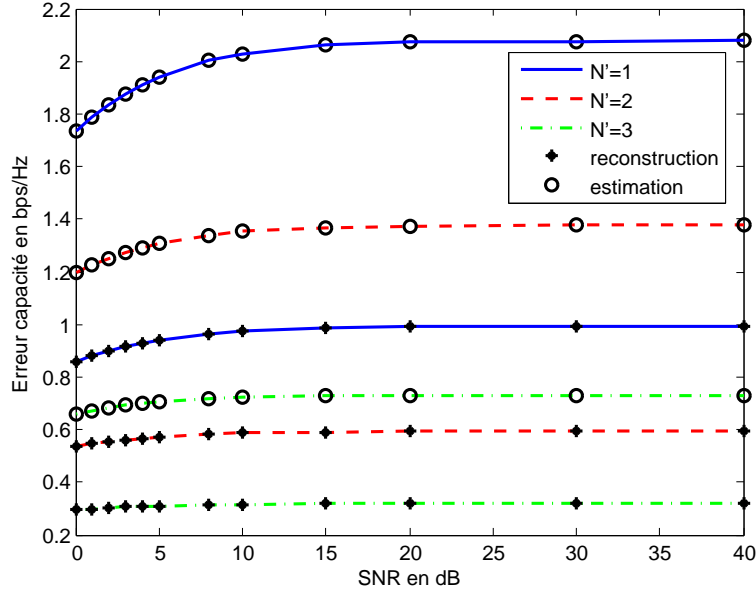


Figure 6.6 Erreur de la capacité pour un réseau ULA $N = 4$ et $L = 2$ avec uniquement erreur de décomposition

L'erreur faite sur la capacité se trouve à la figure 6.6. Sans grande surprise, plus la dimension est importante moins l'erreur de la capacité est importante. Ceci vient simplement du fait que l'erreur de reconstruction est plus faible. Pour la même raison, les configurations minimisant l'erreur d'estimation offrent de moins bons résultats car aucun contrôle n'est fait sur l'erreur de décomposition. On remarque d'autre part que l'erreur tend à se stabiliser à haut SNR. L'erreur qui est faite sur la capacité peut se modéliser par une constante $\epsilon_C(N')$ pour une dimension N' de la base. On a donc pour un SNR assez grand :

$$C(\text{SNR}, N', +\infty) = C(\text{SNR}) - \epsilon_C(N') \quad (6.3)$$

Pour symboliser l'absence d'erreur d'estimation on a pris comme valeur pour D l'infini. ϵ_C va être utile pour les simulations avec des erreurs d'estimation. Les valeurs de cette constante sont présentées dans le tableau 6.2

D'autres simulations montrent que l'erreur sur la capacité se comporte de la même manière pour un réseau de huit antennes que pour un réseau de quatre antennes. Les valeurs de la constante d'erreur de la capacité sont données dans le tableau 6.3. Les dimensions six et sept

Tableau 6.2 Constante d'erreur de reconstruction pour un réseau ULA $N = 4$ et $L = 2$

Dimension	ϵ_C	ϵ_C
	minimisation erreur de reconstruction	minimisation erreur d'estimation
1	0,99	2,08
2	0,59	1,38
3	0,32	0,73

Tableau 6.3 Constante d'erreur de reconstruction pour un réseau ULA $N = 8$ et $L = 2$

Dimension	ϵ_C	ϵ_C
	minimisation erreur de reconstruction	minimisation erreur d'estimation
1	1,93	2,66
2	1,06	1,37
3	0,52	1,57
4	0,21	0,65
5	0,01	0,33
6	0,00	0,00
7	0,00	0,00

permettent d'atteindre de manière très proche la capacité espérée (en tout cas en dessous du seuil d'erreur de la simulation de 10^{-3} bps/Hz).

6.5 Erreur d'estimation et capacité corrigée

6.5.1 Pourquoi modifier la capacité ?

On étudie ici l'impact d'une décomposition sans erreur de reconstruction dans lequel les erreurs d'estimation sont prises en compte. On a vu que l'un des critères de minimisation de ce type d'erreur est basé sur la norme de la matrice des coefficients de projection. En l'absence de reconstruction approximative, l'erreur d'estimation n'est pas très problématique. On connaît déjà tous les ingrédients permettant de diminuer l'erreur de reconstruction du canal : haut SNR, faible norme de la matrice des coefficients de projection, grand nombre de mesures de canal et base surdimensionnée (augmente aussi le nombre de mesures du canal). Les simulations avec nos éléments actuels ne sont donc pas d'un grand intérêt. Il suffit de prendre la dimension la plus sensée, c'est-à-dire celle qui prend des mesures de chaque configuration, et d'augmenter de manière arbitraire D : l'erreur tend tout simplement vers zéro.

Il manque en fait un paramètre que l'on n'a pas encore pris en compte dans le calcul de la capacité : c'est le temps nécessaire aux estimations. Sans cela il n'y a d'ailleurs aucun intérêt

à étudier de nouvelles techniques de configuration. La capacité originale C est remplacée par la capacité corrigée de la forme $\frac{S-E}{S}C$ où E est le nombre d'intervalles de temps total utilisé pour l'estimation des canaux. Ce terme correctif est aussi utilisé dans [4]. Une valeur pour S utilisée dans les trames IS-136 est 162. De manière assez simpliste, en absence d'erreur de reconstruction on peut dire que la configuration est toujours optimale. La méthode consistant à mesurer toutes les configurations a donc pour capacité corrigée :

$$\frac{S - GD}{S} C(\text{SNR})$$

Les autres capacités issues de la décomposition sont de la forme :

$$\frac{S - N'D}{S} C(\text{SNR}, N', D)$$

Notre technique prend donc de l'intérêt dès qu'il est possible d'avoir $N' < G$ ce qui est simple à faire pour un réseau d'antennes. La capacité maximale atteignable est toujours $C(\text{SNR})$. Les simulations vont permettre de déterminer la meilleure combinaison du nombre de canaux à estimer et du nombre de mesures par canal.

6.5.2 Résultats obtenus avec cette capacité

La figure 6.7 contient l'erreur relative de la capacité corrigée qui s'exprime comme

$$\frac{C(\text{SNR}) - \frac{S - N'D}{S} C(\text{SNR}, N', D)}{C(\text{SNR})}$$

On fait toujours la comparaison avec le cas idéal de la capacité pour une connaissance parfaite du canal sans estimation. Seules les trois meilleures combinaisons dimension/nombre d'estimations sont présentées. Elles sont $N' = 4$ et $N' = 5$ avec $D = 2$ et $N' = 4$ avec $D = 3$. Ces combinaisons correspondent aux trois plus faibles valeurs que peut prendre $N'D$ le nombre total de mesures du canal. On remarque aussi que ces trois courbes convergent vers une certaine valeur que l'on peut déterminer. En absence d'erreur de reconstruction, $C(\text{SNR}, N', D)$ tend vers $C(\text{SNR})$ au fur et mesure que D , N' ou le SNR augmentent. L'erreur relative converge donc vers $\frac{N'D}{S}$. La technique mesurant toutes les configurations avec un nombre minimal de mesures ($D = 2$) converge vers une erreur relative de $\frac{GD}{S} \simeq 20\%$. Cette valeur est bien loin des performances atteintes par notre technique de configuration dont l'erreur relative converge avec la meilleure combinaison de N' et D à environ 5%. À faible SNR, l'erreur relative est toujours bien plus faible que 20%. De plus, il ne faut pas oublier que la valeur 20% à faible SNR ne prend pas en compte l'erreur d'estimation. On

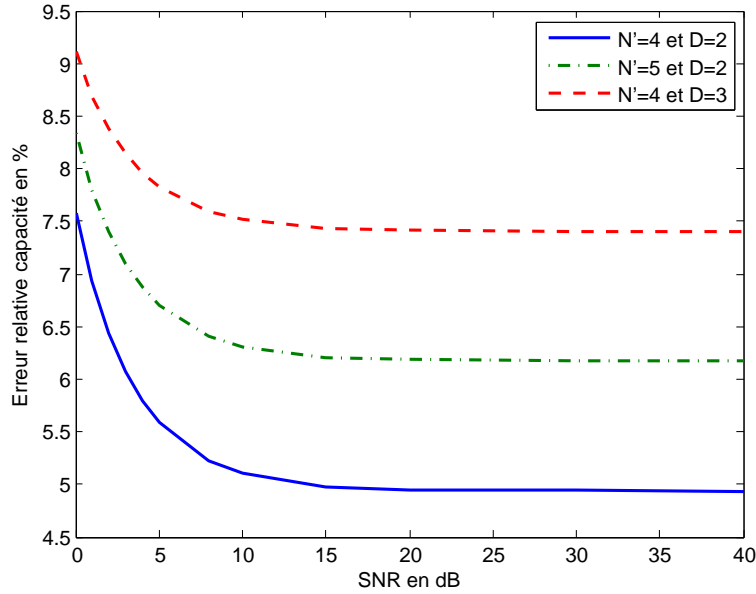


Figure 6.7 Écart relatif de la capacité corrigée pour un réseau ULA $N = 4$ et $L = 2$ en absence d'erreur de reconstruction

a donc une amélioration de la capacité d'environ $\frac{(G-N')D}{S} \simeq 15\%$ par rapport à la capacité maximale atteignable avec notre méthode.

6.6 Choix de la dimension et des configurations

6.6.1 Prise en compte des deux types d'erreur

Désormais on considère les deux types d'erreur et on va tenter de déterminer les meilleures configurations pour les différents réseaux utilisés jusqu'à maintenant. Dans la figure 6.8, on présente l'écart de capacité entre $C(\text{SNR})$ et $C(\text{SNR}, N', D)$ pour différentes dimensions (donnant des erreurs de reconstruction) et différentes valeurs de D pour un réseau de quatre antennes. Le cas $D = +\infty$ correspond au cas sans erreur d'estimation traité dans 6.4. On a gardé seulement les configurations minimisant l'erreur de reconstruction. Seules ces configurations sont intéressantes car comme on peut voir que l'erreur faite sur la capacité reste proche de celle effectuée en l'absence d'estimation dans 6.4. D'ailleurs, à haut SNR, l'effet de l'erreur d'estimation visible à faible SNR s'estompe et les courbes convergent vers les constantes d'erreur données dans le tableau 6.2. Pour une dimension donnée, l'erreur d'estimation est à son maximum lorsque $D = 2$. Le fait que l'erreur d'estimation soit visible à faible SNR malgré l'erreur d'estimation est à relier à la comparaison qui avait été faite dans

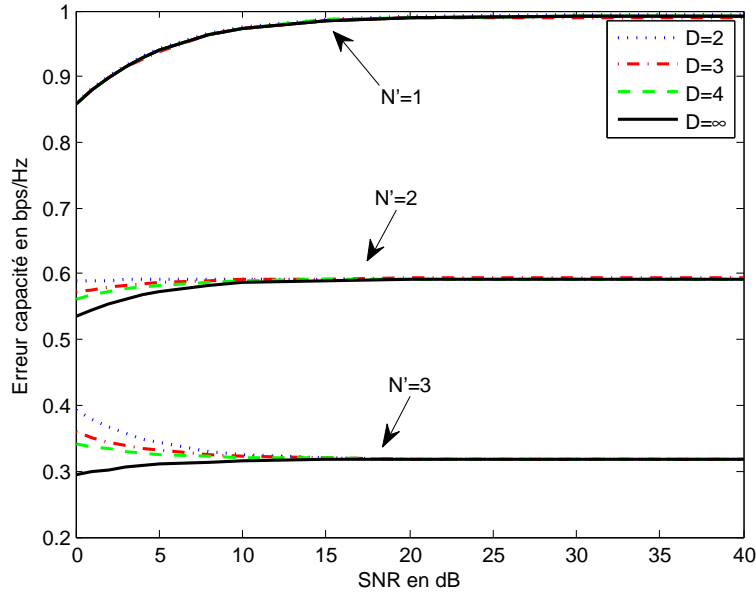


Figure 6.8 Erreur de la capacité pour un réseau ULA $N = 4$ et $L = 2$ avec erreurs de reconstruction et d'estimation

le tableau 4.1. Le cas de la dimension $N' = 1$ est assez particulier car l'effet de l'estimation est invisible même à faible SNR.

Encore une fois ici le calcul de la capacité n'a pas pris en compte le temps nécessaire aux estimations. Une manière simpliste de voir les résultats est d'omettre l'erreur d'estimation tout en gardant le coefficient de correction de la capacité. Notre technique est donc meilleure que celle estimant toutes les configurations à condition que :

$$\begin{aligned}
 & \frac{S - GD}{S} C(\text{SNR}) < \frac{S - N'D}{S} [C(\text{SNR}) - \epsilon_C(N')] \\
 \Leftrightarrow & S\epsilon_C(N') < D(G - N')C(\text{SNR}) + D\epsilon_C(N') \\
 \Leftrightarrow & \frac{D}{S} > \frac{\epsilon_C(N')}{(G - N')C(\text{SNR}) + \epsilon_C(N')}
 \end{aligned}$$

On a donc une condition minimale à respecter sur le rapport du nombre d'intervalles utilisés pour une estimation avec la taille de la trame. Ce rapport dépend de la valeur de la capacité pour un SNR donné. Dans l'intervalle de SNR considéré, la valeur minimale de la capacité est $4,33 \text{ bps/Hz}$ (voir la figure 6.1). Le rapport doit donc être de 1,50% pour $N' = 1$, de 0,97% pour $N' = 2$ et de 0,56% pour $N' = 3$. En choisissant $D = T = 2$ et $S = 162$, le rapport $\frac{D}{S}$ est de 1,2%. Pour une dimension de deux et plus, la technique de décomposition offre de meilleurs résultats qu'un test sur toutes les configurations. En utilisant le tableau 6.3

et une capacité minimale de $6,07 \text{ bps/Hz}$, on peut montrer pour des réseaux de huit éléments qu'une dimension de trois ou plus améliore a priori les résultats.

En absence d'erreur de reconstruction, on avait montré que l'erreur relative de la capacité corrigée converge vers $\frac{N'D}{S}$. Ceci est toujours vrai en présence d'erreur de reconstruction car à partir d'un certain SNR pour une dimension donnée, $\epsilon_C(N') \ll C(\text{SNR})$.

6.6.2 Choix optimaux pour nos réseaux d'antennes étudiés

Lorsque l'on rassemble toutes les simulations pour le réseau de quatre éléments avec correction de la capacité on obtient la figure 6.9. Cette figure contient les configurations et

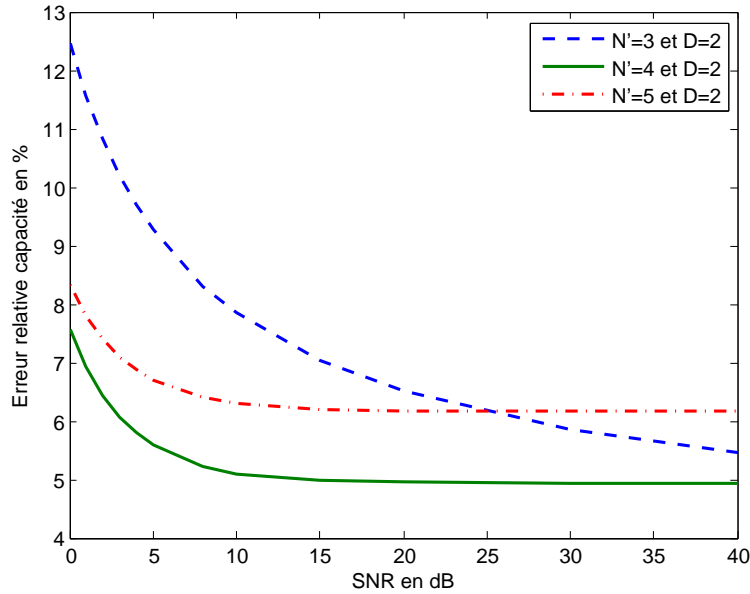


Figure 6.9 Écart relatif de la capacité corrigée pour un réseau ULA $N = 4$ et $L = 2$

combinaisons de N' et D pour des réseaux de quatre antennes permettant d'atteindre les meilleurs résultats pour une trame $S = 162$. Ainsi sur la plage de SNR considérée, le meilleur choix semble être une dimension $N' = 4$ (sans erreur de reconstruction) et deux mesures par canal ($2 = T$ est la plus faible valeur de D possible). Avec une telle configuration, on arrive à une amélioration de la capacité d'environ 15% en comparaison avec la méthode estimant tous les canaux.

Une comparaison de toutes les possibilités pour un réseau de huit antennes nous laisse comme résultat final la figure 6.10. Pour ce cas là l'amélioration de la capacité est d'environ de 14%. On garde encore la plus petite valeur possible pour D c'est-à-dire le nombre de

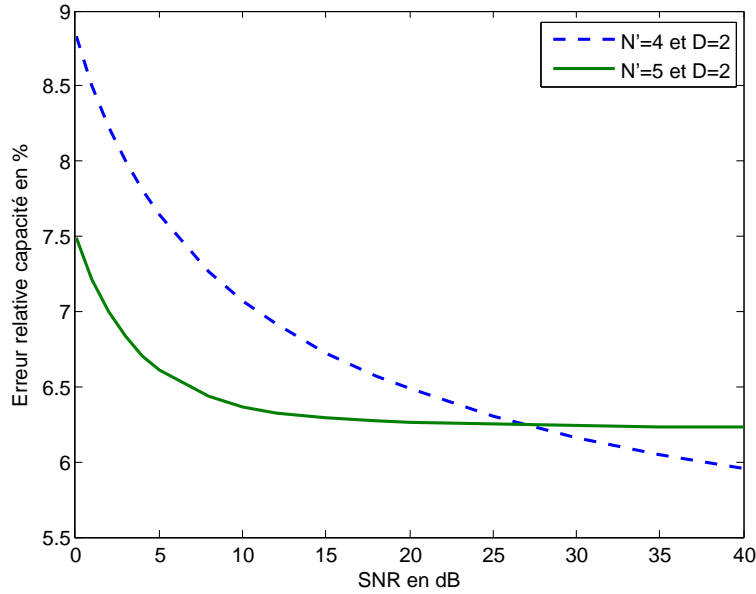


Figure 6.10 Écart relatif de la capacité corrigée pour un réseau ULA $N = 8$ et $L = 2$

transmetteurs, deux. La dimension à choisir dépend du SNR. À faible SNR, le mieux est de choisir une dimension de cinq et à haut SNR une dimension de quatre. Ceci vient tout simplement du fait que l'erreur relative de la capacité converge vers 6,2% pour une dimension de cinq et vers 4,9% pour une dimension de quatre. La dimension plus importante à faible SNR permet de contrer l'erreur d'estimation. On précise que ces configurations sont celles permettant de minimiser l'erreur de reconstruction.

6.6.3 Dimension de base sept pour les réseaux de huit éléments

Dans la comparaison entre les erreurs d'estimation et de reconstruction de la partie 4.4, on avait montré que, pour une dimension de sept avec un réseau de huit antennes, la première erreur devenait plus faible que la seconde autour de 18 dB pour $D = T$. La figure 6.11 contient l'erreur relative de la capacité pour les deux configurations minimisant ces deux types d'erreur.

Les deux courbes se rejoignent bien au niveau des 18 dB : les configurations minimisant l'erreur de reconstruction donnent des résultats bien plus mauvais que les configurations minimisant l'erreur d'estimation à faible SNR (environ 17% de différence à 0 dB). Une fois le seuil de SNR dépassé, l'utilisation des configurations en relation avec la décomposition n'offre pas de réelle amélioration (environ 0,01% de différence à 40 dB). Avec une dimension de base

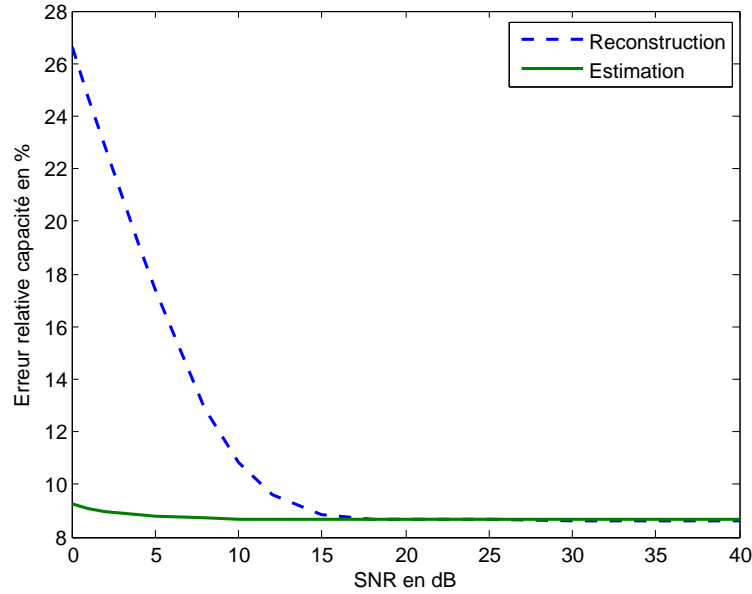


Figure 6.11 Influence du critère de minimisation sur la capacité pour un réseau ULA $N = 8$ et $L = 2$ de dimension de base 7

sept, l'erreur de reconstruction est déjà faible avec les configurations minimisant l'estimation. L'intérêt d'utiliser d'autres configurations de base est donc faible.

6.6.4 Étude de la distribution de sélection des configurations

Il est possible d'étudier la distribution de la sélection des diagrammes de rayonnement afin de savoir s'il est vraiment utile de garder toutes les configurations. Pour le réseau de huit antennes, on a montré que le diagramme de rayonnement ne possède pas de maximum dans le domaine angulaire visible pour certaines configurations.

Commençons avec la distribution pour les deux récepteurs de réseaux à quatre éléments qui se trouve à la figure 6.12. La répartition est grossièrement uniforme à part pour les configurations d'indice six, sept, huit, neuf et dix. Ceci vient du fait de la répartition des maximums des diagrammes selon la configuration de la figure 5.4 et de la loi uniforme que suit la distribution d'arrivée. La configuration d'indice huit a un maximum à 0° et 180° alors que tous les autres n'en ont qu'un seul. Un autre facteur est le manque de maximum sur les extrémités angulaires. Les configurations y ayant des maximums ont donc plus de chance d'être sélectionnées. Les autres maximums pour les autres configurations sont environ répartis uniformément dans le domaine angulaire. La probabilité qu'elles soient sélectionnées est alors sensiblement la même.

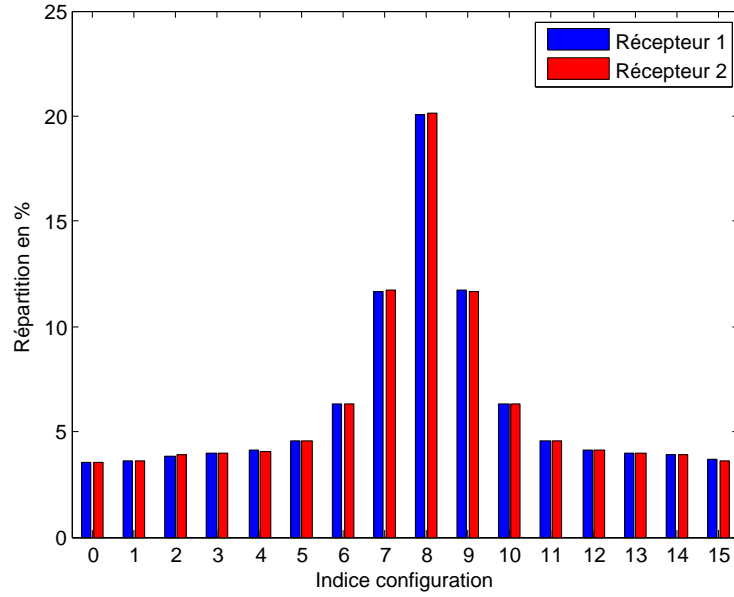


Figure 6.12 Sélection des configurations pour un réseau ULA $N = 4$ et $L = 2$

La probabilité de sélection des configurations pour les réseaux de huit éléments est présentée dans la figure 6.13. Elle est aussi tout à fait compréhensible par la répartition des maximums de la figure 5.5. Les configurations n'ayant aucun maximum dans le domaine visible sont peu voire jamais sélectionnées. Les configurations les plus sélectionnées correspondent aux directions où il y a le moins de maximum. Pour ce réseau, au lieu de reconstruire ou d'estimer les canaux pour les $G = 16$ configurations, seules pour neuf d'entre elles ce sera vraiment utiles. Le rapport $\frac{GD}{S}$ qui permet de voir l'erreur relative de la technique estimant tous les canaux passe alors de 20% à 11%. Les résultats de la technique de décomposition pour ce réseau présenté dans la figure 6.10 offrent encore de meilleurs résultats et l'amélioration de la capacité passe de 14% à 5%.

6.7 Système SISO avec antenne CRLH en réception

On étudie désormais la reconfiguration de l'antenne CRLH de l'annexe B dans un système SISO. Un système SISO est pris car cette antenne se reconfigure selon la fréquence utilisée. Si on avait un système avec deux récepteurs CRLH, ces récepteurs auraient toujours la même configuration ou les émetteurs devraient envoyer les signaux avec deux fréquences différentes.

Toutes les remarques faites pour les réseaux d'antennes s'appliquent aussi pour cette antenne. Les erreurs d'estimation et de reconstruction ont les mêmes effets sur la capacité

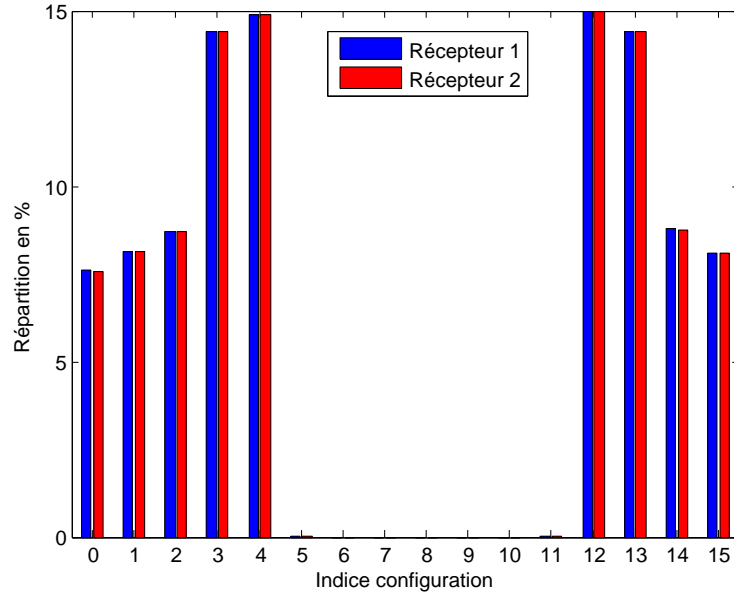


Figure 6.13 Sélection des configurations pour un réseau ULA $N = 8$ et $L = 2$

avec cette antenne. On est capable de déterminer les constantes ϵ_C pour les deux ensembles de configurations de base. Elles sont regroupées dans le tableau 6.4.

À haut SNR, la minimisation de l'erreur de reconstruction semble être le choix le plus adéquat. On remarque aussi que pour des dimensions de cinq et plus cette erreur n'est plus visible.

Lorsque l'on procède à la simulation de notre technique avec l'estimation, l'erreur de reconstruction et la capacité corrigée, les configurations et nombres de mesures donnant les meilleures performances sont regroupés à la figure 6.14

Les deux meilleurs résultats sont obtenus pour une dimension de base de cinq avec encore une fois la plus faible valeur possible pour D c'est-à-dire le nombre de transmetteur, un. Les configurations minimisant l'erreur de reconstruction donnent les meilleures performances : environ 0,1% de mieux que les configurations minimisant l'erreur d'estimation.

Pour un système SISO, la valeur de l'erreur relative corrigée en mesurant tous les canaux $\frac{GD}{S}$ est de 9,9%. Comme toutes les configurations possèdent un maximum dans le domaine angulaire visible, elles sont toutes possiblement sélectionnées par notre technique. On a donc pris seize comme valeur de G . La technique de décomposition permet d'atteindre des erreurs plus faibles de l'ordre de 3,7%.

Tableau 6.4 Constante d'erreur de reconstruction pour une antenne CRLH

Dimension	ϵ_C	ϵ_C
	minimisation erreur de reconstruction	minimisation erreur d'estimation
1	1,97	3,47
2	0,98	1,87
3	0,50	0,91
4	0,05	0,24
5	0,00	0,04
6	0,00	0,01
7	0,00	0,00
8	0,00	0,00
9	0,00	0,00
10	0,00	0,00

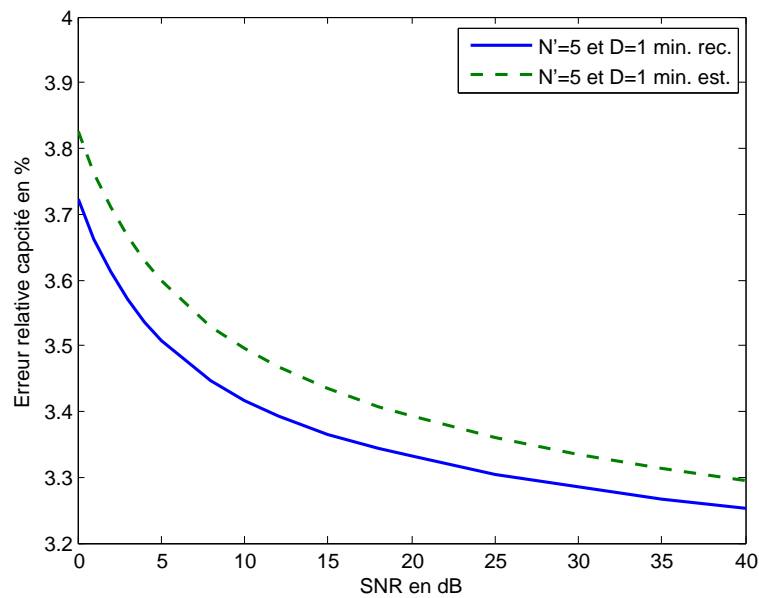


Figure 6.14 Erreur relative de la capacité corrigée dans un système SISO pour une antenne CRLH

6.8 Système MIMO quelconque

Pour un système MIMO quelconque le paramètre à maximiser est le déterminant de la capacité. On simule ici un système 2×2 avec des antennes ULA $N = 4$ et $L = 2$ de dimension quatre dont les résultats sont présentés à la figure 6.15 avec $D = T = 2$.

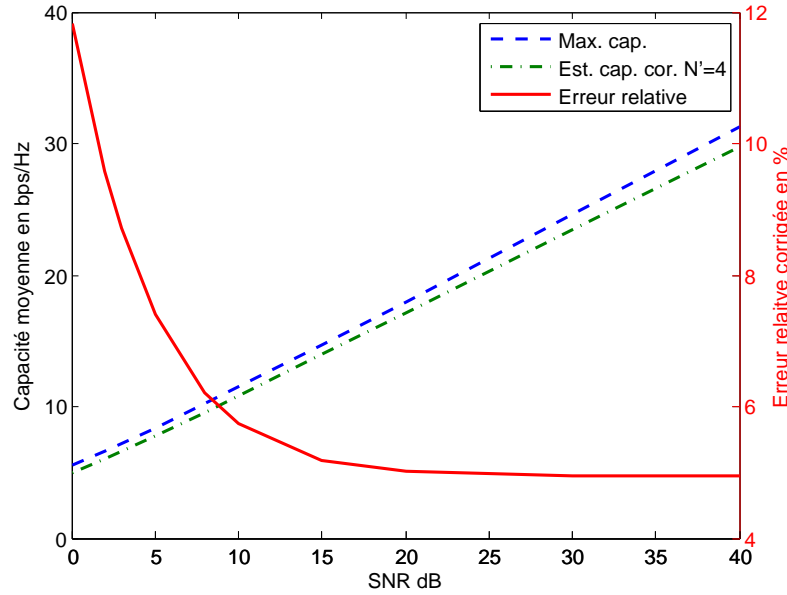


Figure 6.15 Simulation de la technique pour une maximisation du déterminant dans un système 2×2 pour antennes ULA $N = 4$ et $L = 2$ de dimension quatre

La convergence à haut SNR se fait toujours vers $\frac{N'D}{S} \simeq 4,9\%$. On peut voir qu'à faible SNR l'erreur d'estimation nous fait atteindre presque 12% d'erreur relative à 0 dB alors que dans le cas de la maximisation de la norme à la figure 6.9 l'erreur ne dépassait pas 7,5%. L'erreur causée par notre estimateur du déterminant à faible SNR est donc plus importante que celle de l'estimateur de la norme. On obtient cependant toujours de meilleurs résultats qu'en mesurant tous les canaux (20%). De plus, la dimension de base de quatre a été choisie parce qu'elle nous avait permis d'atteindre les meilleures performances dans la maximisation de la norme de 6.6. Ce n'est pas dit que d'autres dimensions ne peuvent pas faire de meilleurs résultats avec la maximisation du déterminant.

Exactement les mêmes remarques sont à faire pour la figure 6.16 qui correspond au cas des réseaux de huit antennes avec une dimension de cinq.

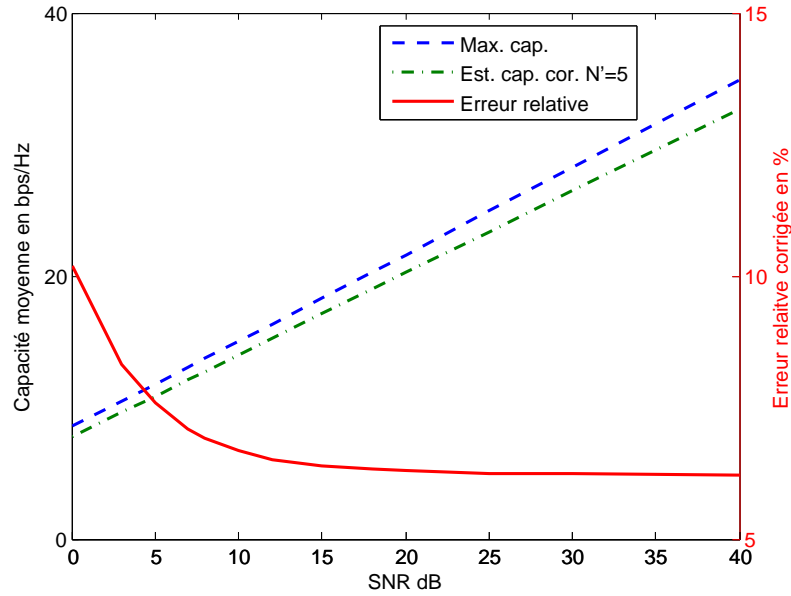


Figure 6.16 Simulation de la technique pour une maximisation du déterminant dans un système 2×2 pour antennes ULA $N = 8$ et $L = 2$ de dimension cinq

Conclusions du chapitre 6

Les simulations ont montré que la technique de décomposition permettait de mieux se rapprocher de la capacité maximale que la technique mesurant le canal pour toutes les configurations. Dépendant de l'antenne et du système MIMO ou SISO utilisés, on note une amélioration de la capacité d'environ 5% à 15%. Pour arriver à de tels résultats, il nous a fallu tout d'abord choisir la méthode à utiliser pour le calcul des coefficients de projection. On a ainsi montré que la méthode simple de (5.23) offre les meilleures performances. Par la même occasion, on a expliqué pourquoi la distribution la plus sensée afin de choisir les configurations minimisant l'erreur de décomposition est la distribution uniforme. Cette distribution permet de garder toujours les mêmes configurations de base et les mêmes coefficients de projection quelque soit la distribution réelle de la direction d'arrivée et cela sans dégrader grandement la capacité du canal. On économise ainsi beaucoup de temps en ne déterminant pas la distribution réelle et on ne recalcule pas non plus des configurations de base optimales ou des nouveaux coefficients.

Sur toutes les antennes étudiées, les choix de la dimension et de la configuration se sont toujours portés sur celles minimisant l'erreur de décomposition sans pour autant toujours l'annuler : une dimension de cinq pour le réseau de huit antennes et l'antenne CRLH et

une dimension de quatre pour le réseau de quatre antennes. La comparaison de l'erreur relative à de hauts SNR est un bon indicateur pour savoir si cette dimension en vaut le coup lorsqu'il y a de faibles erreurs de décomposition. Sans doute un travail supplémentaire permettrait de connaître l'erreur de décomposition tolérée. Une généralisation possible à tous les réseaux d'antennes où $\Delta \geq 1/2$ pourrait être de prendre N' égal au nombre d'éléments du réseau. Un point commun à toutes les simulations est que le nombre optimal de mesures pour l'estimation d'un canal a toujours été de $D = T$ ce qui est sa valeur minimale pour permettre une estimation. Il est important de noter que ces résultats ont été obtenus pour une trame particulière de longueur 162.

CHAPITRE 7

CONCLUSION

Ce mémoire s'est intéressé à la mise au point et à l'étude d'une technique de reconfiguration d'antennes dans un système MIMO minimisant le plus possible le nombre de canaux à estimer. La recherche d'une telle technique est motivée par l'utilisation d'antennes reconfigurables pour améliorer la transmission des signaux sans altérer la capacité.

7.1 Synthèse des travaux

Pour un modèle géométrique de canal de transmission, on a démontré qu'il était possible de reconfigurer des antennes sans mesurer le canal pour toutes les configurations possibles. Ceci est vrai que l'on prenne ou non en compte le couplage entre les antennes. La technique de reconfiguration présentée ici peut s'appliquer à des systèmes MIMO. Elle est basée sur une décomposition particulière des diagrammes de rayonnement séparant les variables de directions et les variables de configurations. Cette décomposition montre que si l'on est capable d'estimer le canal pour certaines configurations des antennes, il est possible d'en déduire le canal pour n'importe quelle configuration. Le choix de la configuration optimal peut ensuite se faire par maximisation de la capacité.

Ce choix de configuration par la technique de décomposition est sensible à deux types d'erreurs : l'une bien connue provient de l'estimation des canaux. Elle s'étend malheureusement aux calculs des canaux restants. L'autre résulte d'une erreur lors de la reconstruction des canaux. On a montré que la première dépend de la norme des coefficients de projection et la seconde est reliée à l'erreur de décomposition des diagrammes de rayonnement. Partant de ces constats on a pu établir des critères de sélection des configurations de base.

Notre capacité à décomposer les diagrammes de rayonnement est un élément central de notre technique. La décomposition SVD s'est avérée être un outil mathématique très intéressant : elle permet une estimation du nombre de configurations ayant une faible erreur de décomposition. Par ailleurs, dans des cas particuliers (réseaux d'antennes), on a montré que la décomposition peut se faire sans erreur mais ce n'est pas forcément le meilleur choix comme l'ont montré les simulations. Ces dernières nous ont permis de résoudre plusieurs problèmes comme la technique à utiliser pour le calcul des coefficients de projection ou la distribution de la configuration d'arrivée que l'on devait considérer dans nos critères de sélection de configurations de base.

La prise en compte du temps perdu dans le calcul de la capacité nous a montré l'importance de la diminution du nombre d'estimation à faire. De cette manière, on a pu montrer que la décomposition permettait une amélioration de la capacité de 5% – 15% par rapport à une estimation des canaux pour toutes les configurations.

7.2 Limitations de la technique de décomposition et perspectives

Une limitation flagrante de notre technique est l'obligation d'avoir une antenne reconfigurable dont le diagramme de rayonnement puisse se décomposer de la manière souhaitée. Pour les antennes réseaux et l'antenne CRLH, cette décomposition ne posait pas de problème. Cependant, la décomposition SVD que l'on a présentée comme très intéressante a été seulement appliquée avec des modèles théoriques de diagramme de rayonnement et non pas avec de vrais relevés d'antennes.

Un autre point faible est la nécessité de modifier les trames de communication actuelles pour permettre l'estimation des canaux désirés. De plus, la trame que l'on a utilisée pour les simulations est de longueur bien spécifique. Les résultats finaux probablement changent si la longueur totale de la trame augmente ou diminue.

Enfin, on a dû construire un estimateur de canal, mais ce dernier ne prend pas en compte par exemple l'estimation du SNR. En plus d'affecter notre estimateur, la trame doit être modifiée afin de permettre cette nouvelle estimation. Ceci diminue encore plus la capacité. Le temps de calcul des canaux non-estimés n'a pas non plus été pris en compte ainsi que la possible ré-évaluation du canal après configuration pour le décodage. La plupart de ces points peuvent faire le sujet d'une étude plus approfondie de la technique présentée. On pourrait aussi considérer d'autres modèles de canaux comme celui de Kronecker par exemple.

RÉFÉRENCES

- [1] L. Godara, *Smart antennas*. CRC Press LLC, 2004.
- [2] J. D. Boerman and J. T. Bernhard, “Performance study of pattern reconfigurable antennas in MIMO communication systems,” *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, vol. 56, no. 1, pp. 231 – 236, Jan. 2008.
- [3] R. L. Haupt, “Phase-only adaptive nulling with a genetic algorithm,” *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, vol. 45, no. 6, pp. 1009 – 1015, Jun. 1997.
- [4] D. Piazza, J. Kountouriotis, M. D’Amico, and K. R. Dandekar, “A technique for antenna configuration selection for reconfigurable circular patch arrays,” *Wireless Communications, IEEE Transactions on*, vol. 8, no. 3, pp. 1456 – 1467, Mar. 2009.
- [5] A. Grau, J. Romeu, L. Jofre, and F. De Flaviis, “On the polarization diversity gain using the ORIOL antenna in fading environments,” in *Proceedings Antennas and Propagation Society International Symposium, 2005 IEEE*, vol. 4B, Jul. 2005, pp. 14 – 17.
- [6] O. Lafond, M. Caillet, B. Fuchs, S. Palud, M. Himdi, S. Rondineau, and L. Le Coq, “Millimeter wave reconfigurable antenna based on active printed array and inhomogeneous lens,” in *Proceedings Microwave Conference, 2008. EuMC 2008. 38th European*, Oct. 2008, pp. 147 – 150.
- [7] A. Grau, M.-J. Lee, J. Romeu, H. Jafarkhani, L. Jofre, and F. De Flaviis, “A multifunctional mems-reconfigurable pixel antenna for narrowband MIMO communications,” in *Antennas and Propagation Society International Symposium, 2007 IEEE*, Jun. 2007, pp. 489 – 492.
- [8] Y. Yashchyshyn, “Reconfigurable antennas by rf switches technology,” in *Proceedings Perspective Technologies and Methods in MEMS Design, 2009. MEMSTECH 2009. 2009 5th International Conference on*, Apr. 2009, pp. 155 – 157.
- [9] N. Haridas, A. Erdogan, T. Arslan, A. Walton, S. Smith, T. Stevenson, C. Dunare, A. Gundlach, J. Terry, P. Argyrakis, K. Tierney, A. Ross, and T. O’Hara, “Reconfigurable MEMS antennas,” in *Proceedings Adaptive Hardware and Systems, 2008 NASA/ESA Conference on*, 2008.
- [10] L. Liu and H. Jafarkhani, “Transmit beamforming for a large reconfigurable antenna array,” in *Proceedings Global Telecommunications Conference, 2005. GLOBECOM ’05. IEEE*, vol. 6, Dec. 2005, pp. 3433 – 3438.

- [11] C. Caloz, T. Itoh, and A. Rennings, “Crlh metamaterial leaky-wave and resonant antennas,” *Antennas and Propagation Magazine, IEEE*, vol. 50, no. 5, pp. 25 – 39, Oct. 2008.
- [12] M. Biguesh and A. Gershman, “Training-based MIMO channel estimation : a study of estimator tradeoffs and optimal training signals,” *Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol. 54, no. 3, pp. 884 – 893, Mar. 2006.
- [13] E. Bjornson and B. Ottersten, “A framework for training-based estimation in arbitrarily correlated rician MIMO channels with rician disturbance,” *Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol. 58, no. 3, pp. 1807 – 1820, Mar. 2010.
- [14] Y. Li, L. Cimini Jr., and N. Sollenberger, “Robust channel estimation for OFDM systems with rapid dispersive fading channels,” *Communications, IEEE Transactions on*, vol. 46, no. 7, pp. 902 – 915, Jul. 1998.
- [15] X. Wang, P. Ho, and Y. Wu, “Robust channel estimation and ISI cancellation for OFDM systems with suppressed features,” *Selected Areas in Communications, IEEE Journal on*, vol. 23, no. 5, pp. 963 – 972, May 2005.
- [16] T. Yoo and A. Goldsmith, “Capacity of fading MIMO channels with channel estimation error,” in *Proceedings IEEE Int. Conf. Commun. (ICC)*, 2004, pp. 808 – 813.
- [17] A. Maaref and S. Aissa, “On the effects of gaussian channel estimation errors on the capacity of adaptive transmission with space-time block coding,” in *Proceedings Wireless And Mobile Computing, Networking And Communications, 2005. (WiMob’2005), IEEE International Conference on*, vol. 1, Aug. 2005, pp. 187 – 193.
- [18] D. Pauluzzi and N. Beaulieu, “A comparison of SNR estimation techniques for the AWGN channel,” *Communications, IEEE Transactions on*, vol. 48, no. 10, pp. 1681 – 1691, Oct. 2000.
- [19] R. Gagliardi and C. Thomas, “Pcm data reliability monitoring through estimation of signal-to-noise ratio,” *Communication Technology, IEEE Transactions on*, vol. 16, no. 3, pp. 479 – 486, Jun. 1968.
- [20] R. Matzner and F. Englberger, “An SNR estimation algorithm using fourth-order moments,” in *Proceedings Information Theory, 1994., 1994 IEEE International Symposium on*, Jun. 1994, p. 119.
- [21] A. Grau, H. Jafarkhani, and F. De Flaviis, “A reconfigurable multiple-input multiple-output communication system,” *Wireless Communications, IEEE Transactions on*, vol. 7, no. 5, pp. 1719 – 1733, May 2008.

- [22] M. Wang and Z. Shen, "Nulling of antenna arrays including the mutual coupling effect," in *Proceedings Vehicular Technology Conference, 2008. VTC Spring 2008. IEEE*, May 2008, pp. 247 – 251.
- [23] S. T. Smith, "Optimum phase-only adaptive nulling," *Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol. 47, no. 7, pp. 1835 – 1843, Jul. 1999.
- [24] W.-S. Choi and T. K. Sarkar, "Phase-only adaptive processing based on a direct data domain least squares approach using the conjugate gradient method," *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, vol. 52, no. 12, pp. 3265 – 3272, Dec. 2004.
- [25] R. O. Schmidt, "A signal subspace approach to multiple emitter location and spectral estimation," Ph.D. dissertation, Stanford University, 1982.
- [26] A. Paulraj, R. Roy, and T. Kailath, "A subspace rotation approach to signal parameter estimation," *Proceedings of the IEEE*, vol. 74, no. 7, pp. 1044 – 1046, Jul. 1986.
- [27] J. Capon, "High-resolution frequency-wavenumber spectrum analysis," *Proceedings of the IEEE*, vol. 57, no. 8, pp. 1408 – 1418, Aug. 1969.
- [28] B. O. Hogstad, M. Patzold, N. Youssef, and V. Kontorovitch, "Exact closed-form expressions for the distribution, the level-crossing rate, and the average duration of fades of the capacity of OSTBC-MIMO channels," *Vehicular Technology, IEEE Transactions on*, vol. 58, no. 2, pp. 1011 – 1016, Feb. 2009.
- [29] A. J. Paulraj, R. Nabar, and D. Gore, *Introduction to Space-Time Wireless Communications*. Cambridge University Press, 2003.
- [30] T. Yoo and A. Goldsmith, "Capacity of fading MIMO channels with channel estimation error," in *Proceedings Communications, 2004 IEEE International Conference on*, vol. 2, 2004, pp. 808 – 813.
- [31] D. Tse and P. Viswanath, *Fundamentals of Wireless Communication*. Cambridge University Press, 2005.
- [32] A. Forenza, D. J. Love, and R. W. Heath Jr., "A low complexity algorithm to simulate the spatial covariance matrix for clustered MIMO channel models," in *Proceedings Vehicular Technology Conference, 2004. VTC 2004-Spring. 2004 IEEE 59th*, vol. 2, May 2004, pp. 889 – 893.
- [33] C. Caloz and T. Itoh, "Array factor approach of leaky-wave antennas and application to 1-d/2-d composite right/left-handed (CRLH) structures," *Microwave and Wireless Components Letters, IEEE*, vol. 14, no. 6, pp. 274 – 276, Jun. 2004.
- [34] —, *Electromagnetic metamaterials : transmission line theory and microwave applications*. Wiley-Interscience, 2006.

ANNEXE A

DIAGRAMME DE RAYONNEMENT D'UN RÉSEAU D'ANTENNES LINÉAIRE UNIFORME

Cette annexe présente le calcul du diagramme de rayonnement d'un réseau d'antennes linéaire uniforme. On se place sous l'hypothèse d'ondes planes et les effets de couplage entre les antennes sont négligés.

On considère le réseau d'antennes linéaire uniforme (ULA) de la figure A.1 utilisé dans [31]. Il est constitué de N antennes séparées d'une distance normalisée Δ . On définit la longueur normalisée du réseau par $L = N\Delta$. L et Δ sont des longueurs divisées par la longueur d'onde λ du signal reçu. Pour simplifier l'approche du réseau, les antennes utilisées sont supposées omnidirectionnelles même lorsqu'elles sont placées dans l'environnement des autres antennes. On note Ω le paramètre de configuration du réseau. Chaque élément du réseau est suivi par un déphaseur dont la valeur est spécifiée un peu plus tard.

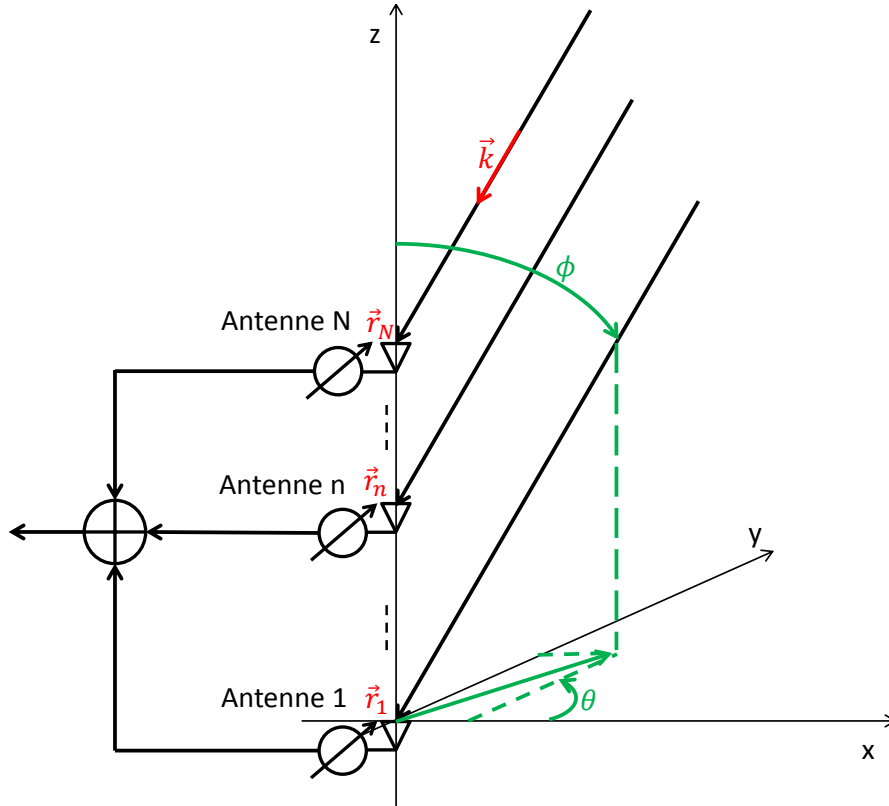


Figure A.1 Schéma du réseau ULA

ϕ est la colatitude variant entre 0 et π et θ est la longitude qui varie entre 0 et 2π . Chaque antenne n se trouve à une position \mathbf{r}_n :

$$\mathbf{r}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (n-1)\Delta\lambda \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

\mathbf{k} est le vecteur d'onde de l'onde incidente qui est supposée plane :

$$\mathbf{k} = -\frac{2\pi}{\lambda} \begin{bmatrix} \cos\theta \sin\phi \\ \sin\theta \sin\phi \\ \cos\phi \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Le déphasage de l'antenne n par rapport à la première antenne du réseau est $-\mathbf{k}^H \mathbf{r}_k = 2\pi\Delta(n-1)\cos\phi = 2\pi\Delta(n-1)\Theta$ avec $\Theta = \cos\phi$. On construit ainsi le vecteur

$$\mathbf{e}(\Theta) = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{j2\pi\Delta\Theta} \\ \vdots \\ e^{j2\pi\Delta(N-1)\Theta} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

Connaissant le réglage des déphaseurs il est possible de déterminer le diagramme du réseau. Différentes études montrent que si le n -ième déphaseur a pour valeur $e^{2\pi\Delta(n-1)\Omega}$, le diagramme a un maximum dans la direction issue de Ω . Intuitivement, ce maximum s'explique par un alignement des phases à la sortie de chaque déphaseur lorsque l'onde arrive selon $\phi = \cos^{-1}\Omega$. Le vecteur contenant les valeurs des déphaseurs s'exprime facilement à partir du vecteur (A.3) précédemment défini puisqu'il s'agit de son conjugué $\mathbf{e}^*(\Omega)$.

Le diagramme de rayonnement s'exprime alors comme un produit scalaire :

$$f(\Theta, \Omega) = \mathbf{e}(\Omega)^H \mathbf{e}(\Theta) \quad (\text{A.4})$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi\Delta n(\Theta-\Omega)} \quad (\text{A.5})$$

$$= e^{j\pi\Delta(N-1)(\Theta-\Omega)} \frac{\sin[\pi\Delta N(\Theta-\Omega)]}{\sin[\pi\Delta(\Theta-\Omega)]} \quad (\text{A.6})$$

ANNEXE B

DIAGRAMME DE RAYONNEMENT D'UNE ANTENNE CRLH

Cette partie reprend brièvement une technique permettant de déterminer le diagramme de rayonnement d'une antenne CRLH. Elle est davantage expliquée dans [33].

L'idée est de représenter l'antenne CRLH comme un réseau d'antennes linéaire auquel l'amplitude du signal décroît exponentiellement. Le diagramme de rayonnement dépend de la fréquence $\frac{\omega}{2\pi}$ utilisée et s'exprime de la manière suivante :

$$f(\Theta) = \sum_{n=1}^N e^{-\alpha(n-1)D} e^{jkD(n-1)(\Theta-\Theta_0)} \quad (\text{B.1})$$

où D est l'espacement entre les antennes.

Trois paramètres dépendent de la configuration ω de l'antenne : le nombre d'ondes dans l'espace libre $k = \frac{2\pi\omega}{c}$, α qui caractérise une atténuation de l'onde et $\Theta_0 = \frac{\beta+q\frac{2\pi}{D}}{k}$ la direction dans laquelle pointe le diagramme de rayonnement où q est un entier. β est aussi une variable dépendant de la configuration. La détermination de α et β est faite à partir d'une modélisation du circuit RF. Ce modèle mène à la construction d'une matrice ABCD dont les valeurs propres sont directement liées avec les paramètres recherchés. Le livre [34] présente des techniques pour les obtenir. La matrice ABCD s'écrit de la manière suivante

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + ZY & Z(2 + ZY) \\ Y & 1 + ZY \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

avec

$$Z = \frac{1}{2} \left[R + j \left(\omega L_R - \frac{1}{\omega C_L} \right) \right] \quad (\text{B.3})$$

et

$$Z = G + j \left(\omega C_R - \frac{1}{\omega L_L} \right) \quad (\text{B.4})$$

R, G, C_L, L_L, C_R et L_R ont des valeurs issues de la modélisation de l'antenne.

Il est possible d'écrire les valeurs propres de cette matrice sous la forme $e^{\pm\gamma l}$ où l est la longueur de ligne LW et on a

$$\alpha = \text{Re} \{ \gamma \} \quad (\text{B.5})$$

et

$$\beta = \pm \text{Im} \{ \gamma \} \quad (\text{B.6})$$

Le signe est à choisir selon le sens de propagation du signal.

Dans toute notre étude l'antenne CRLH utilisée est une antenne de $n = 24$ éléments et de longueur 16 cm . La modélisation de l'antenne est faite avec les paramètres suivants :

Tableau B.1 Paramètres de l'antenne CRLH

R	$1 \ \Omega$
G	$0 \ S$
C_L	$0,68 \ pF$
L_L	$3,38 \ nH$
C_R	$0,50 \ pF$
L_R	$2,45 \ nH$

ANNEXE C

INVERSION D'UNE MATRICE CARRÉE DE VANDERMONDE

L'inversion de ce type de matrice peut être utile pour le calcul des coefficients de projection dans le cas d'un réseau ULA. La méthode rappelée ici fait appel aux polynômes de Lagrange.

On considère la matrice carrée de Vandermonde suivante

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \beta_1 & \cdots & \beta_N \\ \beta_1^2 & \cdots & \beta_N^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_1^N & \cdots & \beta_N^N \end{bmatrix} \quad (\text{C.1})$$

Les polynômes de Lagrange sont définis de la manière suivante :

$$L_n(x) = \prod_{p=1, p \neq n}^N \frac{x - \beta_p}{\beta_n - \beta_p} \quad (\text{C.2})$$

$$= \sum_{p=1}^N M_{np} x^{p-1} \quad (\text{C.3})$$

avec n variant entre 1 et N . Les éléments M_{np} sont rassemblés sous une matrice \mathbf{M} .

En calculant les valeurs de ces polynômes pour les β_1, \dots, β_N , on a sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} L_n(\beta_1) & \cdots & L_n(\beta_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{n1} & \cdots & M_{nN} \end{bmatrix} \mathbf{B} \quad (\text{C.4})$$

Ainsi,

$$\begin{bmatrix} L_n(\beta_1) & \cdots & L_n(\beta_N) \end{bmatrix} \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} M_{n1} & \cdots & M_{nN} \end{bmatrix} \quad (\text{C.5})$$

Or $L_n(\beta_p) = \delta_{np}$. $\begin{bmatrix} L_n(\beta_1) & \cdots & L_n(\beta_N) \end{bmatrix} \mathbf{B}^{-1}$ représente donc la n -ième ligne de \mathbf{B}^{-1} qui est $\begin{bmatrix} M_{n1} & \cdots & M_{nN} \end{bmatrix}$. Il s'ensuit que $\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{M}$.